Типовой расчет

“ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ”

Основные понятия

1. Определение функции двух переменных $z = f(x, y)$, или $F(x, y, z) = 0$.
2. Способы ее задания: аналитический, табличный, явный, неявный.
3. Область определения и область изменения функции $z = f(x, y)$. Классификация областей определения: открытая и замкнутая, ограниченная и неограниченная.
4. Геометрический смысл функции $z = f(x, y)$, или $F(x, y, z) = 0$.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

Решение. Функция **z** представляет собой сумму двух слагаемых функций: $z_1 = \arcsin\frac{x}{2}$ и $z_2 = \sqrt{xy}$. Найдем области их определения:

$$z_1 = \arcsin\frac{x}{2}, \qquad z_2 = \sqrt{xy},$$

$$D_1:\quad -1 \le \frac{x}{2} \le 1, \quad -2 \le x \le 2.$$

$$D_2:\quad x \cdot y \ge 0, \quad 1)\ x \ge 0,\ y \ge 0 \quad \text{или} \quad 2)\ x \le 0,\ y \le 0.$$

Очевидно, область определения функции **z** есть пересечение областей определения z_1 и z_2, т. е. $D = D_1 \cap D_2$ (рис. 1).

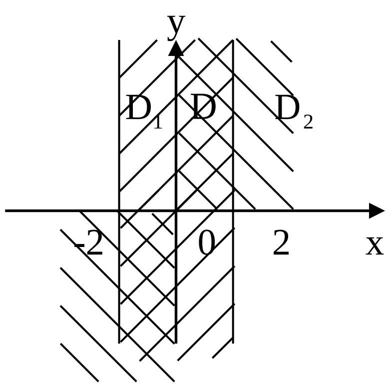


Рис. 1

Ответ: **D** – область, отмеченная двойной штриховкой, замкнутая и неограниченная.

Пример 2. Найти область определения функции $z = \ln(4 + 4x - y^2)$.

Решение. **z** – логарифмическая функция, поэтому $4 + 4x - y^2 > 0$,

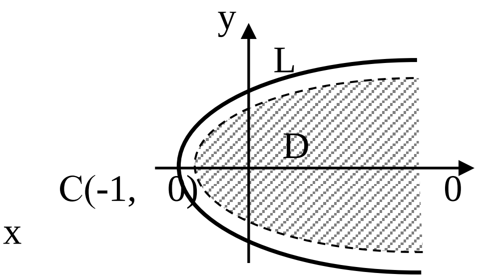


Рис. 2

или $4+4x>y^2$.

Уравнение границы области D:

$y^2=4+4x$ (L),

$y^2=4(x+1)$ − парабола с вершиной $C(-1,0)$.

Парабола разбивает всю плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю по отношению к параболе. Возьмем для контроля любую точку плоскости, например, O(0, 0), подставим ее координаты в первое неравенство: $4+4\cdot 0-0>0, \Rightarrow O(0,0)\in D$; где **D** – область определения функции, открытая, неограниченная (рис.2).

Дифференцирование функций нескольких переменных

Частные производные функции $z=f(x,y)$

а) первого порядка: $z'_x=\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$,

где $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$ - частное приращение **z** по **x**.

$$z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta_y},$$

где $\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$ - частное приращение **z** по **y**.

б) второго порядка: $z''_{xx}=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)'_x=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ - вторая производная функции **z** по переменной **x**, т. е. частная производная по переменной **x**, взятая от частной производной первого порядка по переменной **x**.

$z''_{xy}=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)'_y=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ - смешанная производная **z** по **x** и по **y**;

$z''_{yx}=\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)'_x=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ - смешанная производная **z** по **y** и по **x**.

Можно показать, что порядок дифференцирования безразличен, т. е. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$;

$z''_{yy}=\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)'_y=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ - вторая производная функции **z** по переменной **y**.

Правило. Отыскивая частные производные функции нескольких переменных <u>по одной из переменных</u>, пользуемся правилами и формулами дифференцирования, считая в этот момент <u>все остальные переменные постоянными</u>.

Задача 1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $\mathrm{z} = \mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$.

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\left(\dfrac{x}{y}\right)'_x}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{y}\cdot(x)'}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} = \frac{\dfrac{1}{y}}{\dfrac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

отыскивая $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$, переменную **у** считаем постоянной.

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial y} = \frac{\left(\dfrac{x}{y}\right)'_y}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} = \frac{\left(x\cdot y^{-1}\right)'_y}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} = \frac{x\cdot\left(y^{-1}\right)'_y}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} = \frac{x\cdot(-1)\cdot y^{-2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} = \frac{-\dfrac{x}{y^2}}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

отыскивая $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}$, переменную **х** считаем постоянной.

б) $z = x^2 + 4y^3x^3 - 2x + y^2$.

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x} = \left(x^2\right)' + 4y^3\cdot\left(x^3\right)' - 2(x)' + \left(y^2\right)' = 2x + 4y^3\cdot 3x^2 - 2 + 0,$$

отыскивая $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$, переменную **у** считаем постоянной.

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial y} = \left(x^2\right)' + 4x^3\cdot\left(y^3\right)' - (2x)' + \left(y^2\right)' = 0 + 4x^3\cdot 3y^2 - 0 + 2y,$$

отыскивая $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}$, переменную **х** считаем постоянной.

Пример 1. Доказать следующие тождества:

а) $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} + \dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} = 1$, если $\mathrm{z} = \ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{\mathrm{y}}\right)$.

Решение. Найдем $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$ и $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}$ данной функции и подставим их в равенство, которое надо доказать:

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x} = \frac{\left(e^x + e^y\right)'_x}{e^x + e^y} = \frac{e^x + 0}{e^x + e^y},$$

отыскивая $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$, переменную **у** считаем постоянной..

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(e^x+e^y\right)_y'}{e^x+e^y}=\frac{0+e^y}{e^x+e^y},$$

отыскивая $\frac{\partial z}{\partial y}$, переменную **x** считаем постоянной.

Следовательно

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^x}{e^x+e^y}+\frac{e^y}{e^x+e^y}=1$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=e^{xy}-\cos\frac{x}{y}$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{xy}-\cos\frac{x}{y}\right)_x'=\left|\begin{array}{l}\text{Считаем при этом переменную}\\ \text{"у" постоянной величиной}\end{array}\right|=\left(e^{xy}\right)_x'-\left(\cos\frac{x}{y}\right)_x'=e^{xy}(xy)_x'+\sin\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_x'=$$

$$=e^{xy}\cdot y(x)_x'+\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}(x)_x'=ye^{xy}+\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\left(\text{т.к.}\quad (\mathrm{x})_{\mathrm{x}}'=1\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{xy}-\cos\frac{x}{y}\right)_y'=\left|\begin{array}{l}\text{Считаем при этом}\\ \text{переменную "x"}\\ \text{постоянной величиной}\end{array}\right|=\left(e^{xy}\right)_y'-\left(\cos\frac{x}{y}\right)_y'=e^{xy}\cdot x(y)_y'+\sin\frac{x}{y}\cdot x\left(\frac{1}{y}\right)_y'=$$

$$=x\cdot e^{xy}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\left(\text{т.к. } (\mathrm{y})_{\mathrm{y}}'=1;\left(\frac{1}{y}\right)_y'=(y^{-1})_y'=-y^{-2}=-\frac{1}{y^2}\right).$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}.$

Пример 3. Найти частные производные второго порядка функции $\mathrm{z}=\mathrm{x}^2\mathrm{y}+\mathrm{y}^3$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2y+y^3\right)_x'=\left|\begin{array}{l}\text{Считаем при этом}\\ \text{переменную "у" постоянной}\\ \text{величиной}\end{array}\right|=y\cdot\left(x^2\right)_x'+\left(y^3\right)_x'=y\cdot 2x+0=2xy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2y+y^3\right)_y'=\left|\begin{array}{l}\text{Считаем при этом}\\ \text{переменную "x"}\\ \text{постоянной величиной}\end{array}\right|=x^2\cdot(y)_y'+\left(y^3\right)_y'=x^2+3y^2.$$

Таким образом: $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}=2\mathrm{xy}$, $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}=\mathrm{x}^2+3\mathrm{y}^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2xy)'_x = \left| \begin{array}{l} \text{Считаем при этом} \\ \text{переменную "y" постоянной} \\ \text{величиной} \end{array} \right| = y \cdot (2x)'_x = y \cdot 2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(x^2 + 3y\right)'_x = \left| \begin{array}{l} \text{Считаем при этом} \\ \text{переменную "y" постоянной} \\ \text{величиной} \end{array} \right| = \left(x^2\right)'_x + (3y)'_x = 2x + 0 = 2x.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x^2 + 3y^2\right)'_y = \left| \begin{array}{l} \text{Считаем при этом} \\ \text{переменную "x"} \\ \text{постоянной величиной} \end{array} \right| = \left(x^2\right)'_y + \left(3y^2\right)'_y = 0 + 3 \cdot 2y = 6y.$$

Таким образом: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$

Заметим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

Контрольные задания к задаче 1

ЗАДАНИЕ 1*а*. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z = 2^{xy} + \sin(2xy)$.	**2.** $z = e^{xy} + \ln(x + \ln y)$.
3. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.	**4.** $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{y}$.
5. $z = 2^{xy^3} + \arcsin x$.	**6.** $z = \ln\left(x^2 + y^2 + xy\right)$.
7. $z = \arcsin\frac{x^2}{y}$.	**8.** $z = \arccos\sqrt{x^2 + y^2}$.
9. $z = x^y + \operatorname{arctg}(x + y)$.	**10.** $z = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.
11. $z = \ln\sin\left(x^2 + y\right)$.	**12.** $z = 3^{xy} + \sin\left(x^2 + y^2\right)$.
13. $z = e^{\frac{x}{y}} + \ln\left(x^2 + xy\right)$.	**14.** $z = \cos\ln xy$.
15. $z = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$.	**16.** $z = \operatorname{tg}\ln\left(x^2 + y^2\right)$.
17. $z = 2^{xy} + \sin(2xy)$.	**18.** $z = e^{xy} + \ln(x + \ln y)$.

19. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.	**20.** $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{y}$.
21. $z = 2^{xy^3} + \arcsin x$.	**22.** $z = \ln\left(x^2 + y^2 + xy\right)$.
23. $z = \arcsin\frac{x^2}{y}$.	**24.** $z = \arccos\sqrt{x^2 + y^2}$.
25. $z = x^y + \operatorname{arctg}(x+y)$.	**26.** $z = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.
27. $z = \ln\sin\left(x^2 + y\right)$.	**28.** $z = 3^{xy} + \sin\left(x^2 + y^2\right)$.
29. $z = e^{\frac{x}{y}} + \ln\left(x^2 + xy\right)$.	**30.** $z = \cos\ln xy$.

ЗАДАНИЕ № 1 б. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z = \arcsin\frac{x+y}{xy}$.	**2.** $z = \sin(x+y) + \operatorname{tg}\left(x^2 y\right)$.
3. $z = \ln\left(x^2 + 3y^2 + xy\right)$.	**4.** $z = \operatorname{tg}\frac{x}{y} \cdot \sin\frac{y}{x}$.
5. $z = \ln\frac{xy}{5x+y}$.	**6.** $z = \cos x^3 + \sin y^3 - xy$.
7. $z = x^y + y^x$.	**8.** $z = \sin\ln\frac{x}{y}$.
9. $z = \ln\cos(xy)$.	**10.** $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
11. $z = \operatorname{arcctg}\frac{y}{x}$.	**12.** $z = \operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$.
13. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.	**14.** $z = \frac{2x+y}{x-3y}$.
15. $z = e^{2x+y} + \sqrt{x^2 + y^2}$.	**16.** $z = \arcsin xy$.
17. $z = \arcsin\frac{x+y}{xy}$.	**18.** $z = \sin(x+y) + \operatorname{tg}\left(x^2 y\right)$.

19. $z=\ln\left(x^2+3y^2+x\,y\right).$	**20.** $z=\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}\cdot\sin\dfrac{y}{x}.$
21. $z=\ln\dfrac{x\,y}{5x+y}.$	**22.** $z=\cos x^3+\sin y^3-x\,y.$
23. $z=x^y+y^x.$	**24.** $z=\sin\ln\dfrac{x}{y}.$
25. $z=\ln\cos\left(x\,y\right).$	**26.** $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$
27. $z=\mathrm{arcctg}\dfrac{y}{x}.$	**28.** $z=\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{y}.$
29. $z=\sqrt{x^2+y^2}.$	**30.** $z=\dfrac{2x+y}{x-3y}.$

Пример 4. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ при $z=\ln\dfrac{x+y}{y}$.

Решение. Сначала найдем первые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\frac{x+y}{y}\right)'_x=\frac{1}{\frac{x+y}{y}}\left(\frac{x+y}{y}\right)'_x=\frac{\cancel{y}}{x+y}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}(x+y)'_x=\frac{1}{x+y},\ \left(\text{т.к. } (x+y)'_x=1+0=1\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\frac{x+y}{y}\right)'_y=\frac{1}{\frac{x+y}{y}}\left(\frac{x+y}{y}\right)'_y=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{(x+y)'_y\cdot y-(y)'_y(x+y)}{y^2}=$$

$$\frac{\cancel{y}}{x+y}\cdot\frac{1\cdot y-1\cdot(x+y)}{y^{\cancel{2}}}=\frac{1}{x+y}\cdot\frac{\cancel{y}-x-\cancel{y}}{y}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x+y}=-\frac{x}{y(x+y)}.$$

Теперь находим смешанные вторые частные производные и сравниваем их.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y(x+y)}\right)=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{x+y}\right)'_x=$$

$$=-\frac{1}{y}\cdot\frac{(x)'_x(x+y)-(x+y)'_x\cdot x}{(x+y)^2}=-\frac{1}{y}\cdot\frac{1\cdot(x+y)-1\cdot x}{(x+y)^2}=-\frac{1}{y}\cdot\frac{x+y-x}{(x+y)^2}=-\frac{1}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}}{(x+y)^2}=-\frac{1}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y}\right)=\left((x+y)^{-1}\right)'_y=-(x+y)^{-2}(x+y)'_y=-\frac{1}{(x+y)^2}(0+1)=-\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Видим, что смешанные производные равны, что и требовалось показать.

Экстремумы функции $z = f(x, y)$

(максимум и минимум $z = f(x, y)$)

а) Необходимые условия: если в точке $M_0(x_0, y)$ функция имеет экстремум, то $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ в этой точке. $M_0(x_0, y_0)$ – критическая (стационарная) точка.

б) Достаточные условия: если $M_0(x_0, y_0)$ – критическая точка и

$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0$ в этой точке, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума.

Причем, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка максимума, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка минимума. Чтобы найти экстремум, надо вычислить $z = f(x_0, y_0)$.

Пример 5. Найти минимум и максимум функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Решение. Найдем стационарные точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (необходимые условия экстремума):

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y \end{cases}.$$

Решим систему уравнений

$$+\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x = -y.$$

$$x^3 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{2};\quad x_2 = 0;\quad x_3 = \sqrt{2}.$$

Найдены три стационарные точки: $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_2(0, 0)$, $M_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Исследуем их на экстремум с помощью достаточных условий:

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \right)^2 > 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 4;$$

$$\Delta = (12x^2 - 4)(12y^2 - 4) - 4^2.$$

1) $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $\Delta_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 400 - 16 > 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 4 > 0$,

отсюда следует, что в точке M_1 функция **z** имеет минимум

$$z_{\min}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^4 - 2(-\sqrt{2})^2 + 4(-\sqrt{2})\sqrt{2} - 2(-\sqrt{2})^2 = -8.$$

2) $M_2(0,0)$; $\Delta_2(0, 0) = 0$ – неизвестно, есть ли экстремум.

3) $M_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $\Delta_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 4 > 0$,

отсюда следует, что в точке M_3 функция **z** имеет минимум, $z_{\min}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$.

Ответ: Данная функция имеет минимум $(z_{\min} = -8)$ в двух симметричных точках $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, скорее всего в точке $O(0, 0, 0)$ у нее максимум $(z_{\max} = 0)$.

<u>**Задача 2**</u> Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - xy + 2x - 3y + 4$.

Решение

Найдем сначала стационарные точки, т.е. те точки, в которых частные производные одновременно равны нулю.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x - y + 2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y - x - 3, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ 2y - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Изменим порядок во втором уравнении и приведем систему линейных уравнений к стандартному виду, чтобы ее можно было решить методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)2 - (-1) \cdot 3 = -4 + 3 = -1,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6-(-2)(-1) = 6-2 = 4, \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{4}{3}.$$

Нашли одну стационарную точку, в которой $z'_x = z'_y = 0$, это точка $M_0\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Выясним с помощью вторых производных, есть ли в M_0 экстремум и, если есть, какой.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - y + 2\right) = 2,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y - x - 3) = 2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2y - x - 3) = -1.$$

Составляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3 > 0$.

Так как $\Delta > 0$, то экстремум существует. Так как $A = 2 > 0$, то в стационарной точке M_0 функция имеет минимум. Найдем его.

$$z_{\min}\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 3 \cdot \frac{4}{3} + 4 = \frac{1}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - 4 + 4 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

.

Ответ: $z_{\min}\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$.

Контрольные варианты к задаче 2.

Исследовать на экстремум:

1. $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2.$	**2.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
3. $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6.$	**4.** $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3.$
5. $z = x^2 - 8x - 10y + xy + y^2 + 17.$	**6.** $z = 4x + 5y - x^2 - xy - y^2 + 4.$
7. $z = 3x + 9y - x^2 - xy - y^2 - 4.$	**8.** $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
9. $z = 13y + 11x - xy - x^2 - y^2 + 5.$	**10.** $z = 6x - 8y - x^2 - y^2 - 17.$
11. $z = x^2 - 2x + 1 + 2y^2.$	**12.** $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$

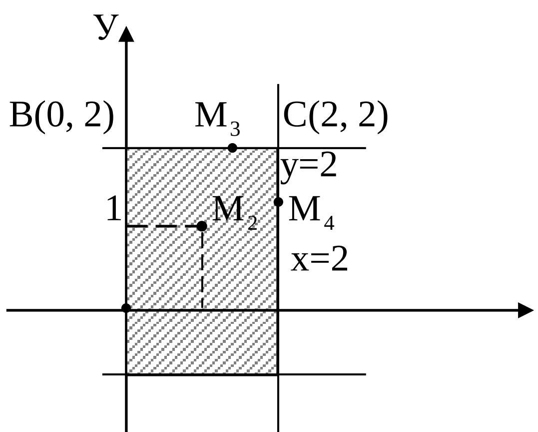
13. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$	**14.** $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$
15. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$	**16.** $z = 4x - 4y - x^2 - y^2.$
17. $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2.$	**18.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
19. $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6.$	**20.** $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3.$
21. $z = x^2 - 8x - 10y + xy + y^2 + 17.$	**22.** $z = 4x + 5y - x^2 - xy - y^2 + 4.$
23. $z = 3x + 9y - x^2 - xy - y^2 - 4.$	**24.** $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
25. $z = 13y + 11x - xy - x^2 - y^2 + 5.$	**26.** $z = 6x - 8y - x^2 - y^2 - 17.$
27. $z = x^2 - 2x + 1 + 2y^2.$	**28.** $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$
29. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$	**30.** $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$

Наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D

Правило. Чтобы найти **M** – наибольшее и **m** – наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области **D**, находят критические точки этой функции. Если эти точки принадлежат области **D**, то в них следует вычислить значения $z = f(x, y)$. Затем, используя уравнения границы **L** области **D**, нужно найти критические точки $z = f(x, y)$, принадлежащие **L**, вычислить в них значения $z = f(x, y)$. Вычислить значения $z = f(x, y)$ на концах **L**. Осталось из всех найденных значений данной функции $z = f(x, y)$ выбрать самое большое **M** и самое малое **m**.

<u>Задача 3.</u> Найти наибольшее **M** и наименьшее **m** значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

Решение. Найдем критические точки функции **z**, которые принадлежат заданной области (рис. 2).



$$z'_x = 3x^2 - 3y$$
$$z'_y = 3y^2 - 3x$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x, \end{cases}$$

подставим $y = x^2$ во второе уравнение:

0

M_1 1 2 x

y=-1

A(0, -1) D(2, -1)

Рис. 2

Таким образом, решений у системы два: $\{0,\ 0\}$ и $\{1,\ 1\}$. Первому решению соответствует точка $M_1(0,\ 0)$, которая принадлежит границе области. Второму решению соответствует критическая точка $M_2(1,\ 1)$, которая принадлежит области, поэтому вычислим значения функции в ней: $z(1,\ 1)=1^3+1^3-3\cdot 1\cdot 1=-1,\quad \underline{z(1,\ 1)=-1}.$

Исследуем функцию $\mathbf{z}$ на границе области (прямоугольник ABCD), которая состоит из четырех звеньев:

1. **AB**: $x=0,\ -1\le y\le 2,$ где $z=y^3$. Найдем $z'=3y^2;\ z'=0\ \Rightarrow\ y=0.$

Получили задачу на экстремум для функции одной переменной. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=y^3$ на отрезке $[-1,\ 2]$. Найдем $z'=3y^2;\ z'=0\ \Rightarrow\ y=0$. Получаем критическую точку $M_1(0,\ 0)$, вычислим функцию в этой точке: $\underline{z(0,\ 0)=0}$.

2. **BC**: $y=2,\ 0\le x\le 2,$ где $z=x^3+2^3-3x\cdot 2$ или $z=x^3+8-6x$. Найдем производную этой функции: $z'=3x^2-6;\ z'=0\ \Rightarrow\ x^2=2\ \Rightarrow\ x=\sqrt{2}\in BC$, корень уравнения $x=-\sqrt{2}\notin BC$, поэтому критическая точка $M_3\left(\sqrt{2},\ 2\right)\in BC$. Вычислим значение функции в ней: $z\left(\sqrt{2},\ 2\right)=\left(\sqrt{2}\right)^3+2^3-3\cdot\sqrt{2}\cdot 2=2\sqrt{2}+8-6\sqrt{2}=8-4\sqrt{2}\approx 2{,}4.$

$\underline{z\left(\sqrt{2},\ 2\right)\approx 2{,}4}.$

3. **CD**: $x=2,\ -1\le y\le 2,$ где $z=2^3+y^3-3\cdot 2\cdot y=8+y^3-6y$. Найдем $z'=3y^2-6,\ z'=0\ \Rightarrow\ y^2=2\ \Rightarrow\ y=\sqrt{2}\in CD$, а $y=-\sqrt{2}\notin CD$. Поэтому критическая точка $M_4\left(2,\ \sqrt{2}\right)\in CD$. Вычислим в ней значение функции: $z\left(2,\sqrt{2}\right)=2^3+\left(\sqrt{2}\right)^3-3\cdot 2\cdot\sqrt{2}=8-4\sqrt{2}\approx 2{,}4.$ $\underline{z\left(2,\ \sqrt{2}\right)\approx 2{,}4}.$

4. **AD**: $y=-1,\ 0\le x\le 2,$ где $z=x^3+(-1)^3-3x(-1)$ или $z=x^3-1+3x$. Найдем производную этой функции: $z'=3x^2+3,\ z'=0\ \Rightarrow$ уравнение $x^2=-1$, действительных корней не имеет.

5. Осталось вычислить значения функции $z=x^3+y^3-3xy$ на концах каждого из отрезков, являющихся сторонами прямоугольника: **AB**, **BC**,

CD, **AD**, т. Е. в вершинах прямоугольника $A(0,\ -1), B(0,\ 2), C(2,\ 2), D(2,\ -1)$.

$$z(A)=z(0,-1)=0^3+(-1)^3-3\cdot 0\cdot(-1)=-1, \qquad \underline{z(A)=-1},$$

$$z(B)=z(0,2)=0^3+2^3-3\cdot 0\cdot 2=8, \qquad \underline{z(B)=8},$$

$$z(C)=z(2,2)=2^3+2^3-3\cdot 2\cdot 2=4, \qquad \underline{z(C)=4},$$

$$z(D)=z(2,-1)=2^3+(-1)^3-3\cdot 2\cdot(-1)=8-1+6=13, \quad \underline{z(D)=13}.$$

Сравнив все подчеркнутые значения функции **z** (только они представляют интерес), делаем вывод: наибольшее значение **z** достигает в вершине прямоугольника **D**, т. Е. $M=z(2,\ -1)=13$, а наименьшее – в двух точках: во внутренней точке области M_2, $m=z(1,\ 1)=-1$ и в вершине.

Контрольные варианты к задаче 3.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1.	$z=x^2+2xy-y^2-4x$ в треугольнике со сторонами $y=x+1,\ y=0,\ x=3$.
2.	$z=x^2-2xy-y^2+4x+1$ в треугольнике со сторонами $x+y+1=0$, $y=0$, $x=-3$.
3.	$z=x^2+xy-2$ в замкнутой области, ограниченной $y=4x^2-4$ и осью OX.
4.	$z=y^2-2xy-x^2+4x-3$ в треугольнике со сторонами $y=x+1,\ x=0,\ y=2$.
5.	$z=x^2+2x\ y-y^2-2x+2y$ в треугольнике со сторонами $y=x+2,\ \ y=0,\ \ x=2$.
6.	$z=x^2+2xy-10$ в замкнутой области, ограниченной $y=x^2-4$ и осью OX.
7.	$z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x$ в квадрате $0\le x\le 2, 0\le y\le 2$.
8.	$z=2x+y-xy$ в квадрате $0\le x\le 4,\ 0\le y\le 4$.

9.	$z=\frac{1}{2}x^2-xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{3}$ и $y=3.$
10.	$z=1+x+2y$ в области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=1.$
11.	$z=1+x+2y$ в области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0,\ x-y=1.$
12.	$z=x^2+2xy-4x+8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=0,$ $y=0,\ x=1,\ y=2.$
13.	$z=x^2+2xy+4x-y^2$ в треугольнике со сторонами $x+y+2=0,\ x=0,\ y=0.$
14.	$z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ в треугольнике со сторонами $x=0,\ y=0,\ x+y=3.$
15.	$z=2x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-4x$ в треугольнике со сторонами $y=2x,\ y=2,\ x=0.$
16.	$z=5x^2-3xy+y^2+4$ в квадрате, ограниченном прямыми $x=-1,\ x=1,$ $y=-1,\ y=1.$
17.	$z=x^2+2xy-y^2-4x$ в треугольнике со сторонами $y=x+1,\ y=0,\ x=3.$
18.	$z=x^2-2xy-y^2+4x+1$ в треугольнике со сторонами $x+y+1=0,$ $y=0,\ x=-3.$
19.	$z=x^2+xy-2$ в замкнутой области, ограниченной $y=4x^2-4$ и осью OX.
20.	$z=y^2-2xy-x^2+4x-3$ в треугольнике со сторонами $y=x+1,\ x=0,\ y=2.$
21.	$z=x^2+2xy-y^2-2x+2y$ в треугольнике со сторонами $y=x+2,\ y=0,\ x=2.$
22.	$z=x^2+2xy-10$ в замкнутой области, ограниченной $y=x^2-4$ и осью OX.
23.	$z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x$ в квадрате $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2.$

24.	$z=2x+y-xy$ в квадрате $0\le x\le 4,\ 0\le y\le 4.$
25.	$z=\frac{1}{2}x^2-xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{3}$ и $y=3.$
26.	$z=1+x+2y$ в области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=1.$
27.	$z=1+x+2y$ в области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0,\ x-y=1.$
28.	$z=x^2+2xy-4x+8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=0,$ $y=0,\ x=1,\ y=2.$
29.	$z=x^2+2xy+4x-y^2$ в треугольнике со сторонами $x+y+2=0,\ x=0,\ y=0.$
30.	$z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ в треугольнике со сторонами $x=0,\ y=0,\ x+y=3.$

Элементы скалярного поля

Производная скалярного поля $u=u(x,\ y,\ z)$ по направлению вектора

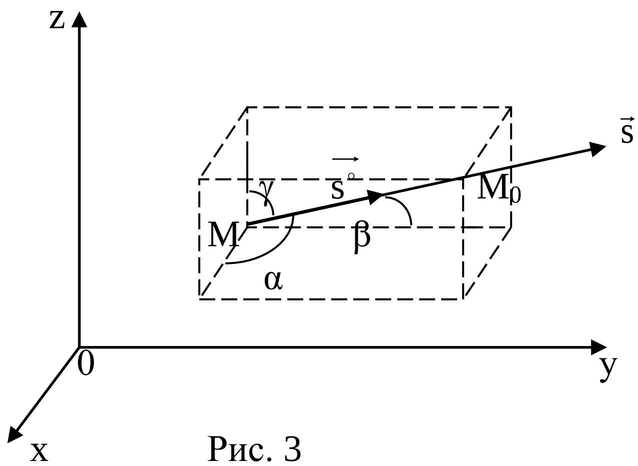


Рис. 3

$\vec{s}^\circ=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ (рис.3). определяется так:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

– это скорость изменения скалярного поля $u=u(x,\ y,\ z)$ в направлении вектора $\vec{s}^\circ$.

Пример 6. Найти скорость изменения скалярного поля $u(M)=xyz$ в точке $M_0(5,\ 1,\ -8)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(9,\ 4,\ 4)$.

Решение. Скорость изменения скалярного поля в направлении вектора $\vec{s}^\circ$ в точке M_0 определяют по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma\,.$$

В задаче $\vec{s} = \overrightarrow{M_0 M_1} = \{4, 3, 12\}$, $|\vec{s}| = \left|\overrightarrow{M_0 M_1}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13$,

$$\overrightarrow{s^\circ} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left\{\frac{4}{13}; \frac{3}{13}; \frac{12}{13}\right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left. y z \right|_{M_0(5,1,-8)} = 1 \cdot (-8) = -8,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left. x z \right|_{M_0(5,1,-8)} = 5 \cdot (-8) = -40,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left. x y \right|_{M_0(5,1,-8)} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Подставим все найденные величины в первую формулу:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -8 \cdot \frac{4}{13} - 40 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{-32 - 120 + 60}{13} = -\frac{92}{13} < 0.$$

Ответ: В заданном направлении данное скалярное поле убывает со скоростью $\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{92}{13}$.

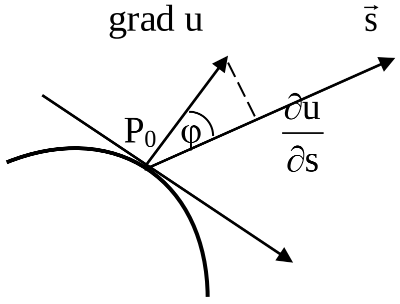
Градиент скалярного поля $u = u(x, y, z)$ – вектор

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\vec{k} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= \operatorname{grad} u \cdot \overrightarrow{s^\circ} = \text{Пр}_{\overrightarrow{s^\circ}} \operatorname{grad} u.$$ Поэтому $\max \frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|$.



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \text{Пр}_{\vec{s}} \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$$

(рис. 7).

$\bar{s}_{кас}$

Рис. 7

Пример 7. Найти величину градиента скалярного поля $u(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке $M_0(1, -1, 2)$.

Решение.

$$\mathrm{grad}\, u = \nabla u = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} =$$

$$= \left.(2x - 2yz)\right|_{M_0(1,-1,2)} \vec{i} + \left.(2y - 2xz)\right|_{M_0(1,-1,2)} \vec{j} + \left.(2z - 2xy)\right|_{M_0(1,-1,2)} \vec{k} =$$

$$= (2\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 2)\vec{i} + (2\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 2)\vec{j} + (2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot(-1))\vec{k} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} = \{6, -6, 6\}.$$

$$|\mathrm{grad}\, u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

Ответ: $|\mathrm{grad}\, u| = 6\sqrt{3}$.

<u>**Задача 4.**</u> Найти производную функции $z = 3x^2 - 4y^3 + 2xy^2 - 5x + 7y - 1$ в точке $A(0,1)$ в направлении от этой точки к точке $B(4,4)$.

Решение. Напишем формулу производной функции по направлению вектора $\vec{s}$.

$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot \cos B$, где $(\cos\alpha, \cos\beta) = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$- орт направления вектора $\vec{s}$.

Сначала найдем вектор $\vec{s}$, в направлении которого будем искать производную. $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (4-0; 4-1) = (4;3)$. Найдем длину $\vec{s}$. $|\vec{s}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Направляющие косинусы вектора $\vec{s}$ совпадают с координатами орта $\vec{s}$, поэтому $cos\,\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$.

Теперь найдем частные производные функции z.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2 - 4y^3 + 2xy^2 - 5x + 7y - 1\right)'_x = 6x + 2y^2 - 5$, $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = 6\cdot 0 + 2\cdot 1^2 - 5 = 2 - 5 = -3$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x^2 - 4y^3 + 2xy^2 - 5x + 7y - 1\right)'_y = -12y^2 + 4xy + 7$,

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = -12\cdot 1^2 + 4\cdot 0\cdot 1 + 7 = -12 + 7 = -5.$

Все найденные значения подставляем в формулу производной по направлению.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_A = (-3)\cdot\frac{4}{5} + (-5)\cdot\frac{3}{5} = \frac{-12-15}{5} = -\frac{27}{5}.$$

Вывод. Функция z убывает по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, так как полученная производная меньше нуля.

Ответ: $\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_A = -\frac{27}{5}.$

Контрольные варианты к задаче 4.

Найти производную функции:

1.	$z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке (3; 1) в направлении от этой точки к точке (6; 5).
2.	$z = 2xy^2 + y^3 + 3xy$ в точке (4; 1) в направлении от этой точки к точке (5; 1).
3.	$z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке (2; 1) в направлении от этой точки к началу координат.
4.	$z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке (3; 1) в направлении от этой точки к точке (6; 5).
5.	$z = x^3 + 3x^2y + 6xy + y^2$ в точке (1; 1) в направлении от этой точки к точке (2; 2).
6.	$z = x^2 - 3xy + 5$ в точке (1; 2) в направлении от этой точки к точке (1; 1).
7.	$z = xy$ в точке (5; 1) в направлении от этой точки к точке (9; 4).
8.	$z = x^2 - 3xy + 5$ в точке (1; 2) в направлении от этой точки к точке (1; 1).
9.	$z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке (2; 1) в направлении от этой точки к началу координат.
10.	$z = 2xy^2 + y^3 + 3xy$ в точке (4; 1) в направлении от этой точки к точке (5; 1).
11.	$z = 3x^4 + xy + y^2$ в точке (1; 2) в направлении вектора, образующего с осью OX угол в 45°.
12.	$z = xy^2 + x^3 - xy$ в точке (1; 1) в направлении, образующем углы α =

	30^o, $\beta = 60^o$.
13.	$z=\ln\left(e^x+e^y\right)$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
14.	$z=x^2-xy-2y^2$ в точке (1; 2) в направлении, составляющем с осью OX угол в 60^o.
15.	$z=x^2y+x^3$ в точке (1; 1) по направлению вектора $\vec{e}=\{1;-1\}$.
16.	$z=\ln\left(e^x+e^y\right)$ в начале координат в направлении луча, образующего угол в 30^o с осью OX.
17.	$z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точке (1; 1) в направлении луча, образующего угол в 60^o с осью OX.
18.	$z=\operatorname{arctg} xy$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
19.	$z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке (3; 1) по направлению вектора $\vec{e}=\{3;4\}$.
20.	$z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точке (1; 1) в направлении луча, образующего угол в 60^o с осью OX.
21.	$z=\ln\left(e^x+e^y\right)$ в начале координат в направлении луча, образующего угол в 30^o с осью OX.
22.	$z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке (1; 3) по направлению вектора $\vec{e}=\{3;4\}$.
23.	$z=x^2-xy-2y^2$ в точке (1; 2) в направлении, составляющем с осью OX угол в 60^o.
24.	$z=3x^4+xy+y^2$ в точке (1; 2) в направлении вектора, образующего с осью OX угол в 45^o.
25.	$z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке (3; 1) по направлению вектора $\vec{e}=\{3;4\}$.
26.	$z=\ln\left(e^x+e^y\right)$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
27.	$z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке (1; 3) по направлению вектора $\vec{e}=\{3;4\}$.
28.	$z=xy^2+x^3-xy$ в точке (1; 1) в направлении, образующем углы $\alpha =$ 30^o, $\beta = 60^o$.

29.	$z = \operatorname{arctg} xy$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
30.	$z = x^y$ в точке (5; 1) в направлении от этой точки к точке (9; 4).