Типавой расчет №1 (2-0й сем.)
“ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ”
1 Первообразная и неопределенный интеграл

При выполнении предыдущих контрольных работ мы столкнулись с тем, что ряд физических и геометрических задач сводится к нахождению производных от функций. Наряду с этим ряд задач сводится к обратной операции–отысканию функции по ее производной. Эта операция называется *интегрированием*, следовательно, интегрирование должно заключаться в следующем: задана производная –требуется найти функцию.

Определение. Функцию $y=F(x)$, заданную на промежутке x, называют *первообразной* для функции $y=f(x)$, заданной на том же промежутке, если для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x)=f(x)$ (или, что то же самое, равенство $dF(x)=f(x)dx$). Например, для функции $f(x)=\cos x$ первообразной будет функция $F(x)=\sin x$, т. к. $F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$ для всех x; для функции $3x^2$ первообразной будет функция x^3, т.к. $\left(x^3\right)'=3x^2$ для всех x; для скорости V точки первообразной будет путь S, который прошла эта точка, т. к. $S_t'=V$, и так далее.

Так как первообразная имеет производную, следовательно, она непрерывна. Но верно и более глубокое утверждение: если функция $f(x)$ непрерывна, то она имеет первообразную. В интегральном исчислении мы будем иметь дело только с непрерывными функциями.

Если функция $y=F(x)$ является первообразной для функции $y=f(x)$ на промежутке X, то и любая из функций вида $y=F(x)+C$ является первообразной для $y=f(x)$ на том же промежутке. Это следует из того, что

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x).$$

Нетрудно убедиться в верности и обратного утверждения: если $F(x)$ есть первообразная $f(x)$, то все первообразные для $f(x)$ содержатся в формуле $F(x)+C$.

Определение. Совокупность всех первообразных для заданной функции $f(x)$ на промежутке x называется ***неопределенным интегралом*** этой функции и обозначается так: $\int f(x)dx$ (читается: ”интеграл эф от икс дэ икс”);

- $f(x)$ называется подынтегральной функцией;
- произведение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением;
- $\int$ – знаком интеграла;
- x – переменной интегрирования.

Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx=F(x)+C$ (C–произвольная константа). Например, $\int \cos x\, dx=\sin x+C$; $\int 3x^2\, dx=x^3+C$.

Из определения интеграла следует, что каждой формуле дифференциального исчисления $F'(x)=f(x)$ соответствует формула $\int f(x)dx=F(x)dx+C$ в интегральном исчислении, так что в частности вся таблица производных может быть переписана в виде таблицы интегралов:

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$; II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

III. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; IV. $\int e^x\, dx = e^x + C$;

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$; VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|$; VIII. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2\cdot a} \cdot \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$;

IX. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$; X. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

XI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$; XII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$;

XIII. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, x + C \\ -\mathrm{arcctg}\, x + C \end{cases}$; XIV. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg}\, \frac{x}{a} + C$;

XV. $\int (\sqrt{x^2+a})dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$; XVI.

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$.

Займемся теперь основными свойствами неопределенных интегралов и правилами их вычисления.

Примем без доказательства свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int f(x)dx = f(x) + C$;
3. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
4. $\int df(x)dx = f(x) + C$;
5. $\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$ (k–постоянная);
6. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$.

1. Интегрирование подстановкой

Замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$ в интеграл производится по формуле

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt; \qquad (1.1)$$

при этом говорят, что в интеграле слева сделана замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$. Формулой (1.1) можно пользоваться следующим образом: подобрать функцию $x = u(t)$ так, чтобы, подставив вместо x подынтегральное выражение, получить более простой интеграл.

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Решение. С целью упрощения подынтегрального выражения положим $x-3=t^2$. Отсюда $x=t^2+3$; $dx=d\left(t^2+3\right)$; $dx=d\left(t^2+3\right)'dt$; $dx=\left[(t^2)'+3'\right]dt$; $dx=\left[2t+0\right]dt$; $dx=2t\,dt$. Заменив всюду под интегралом x на $\varphi(t)=t^2+3$, получим

$$\int x\left(\sqrt{x-3}\right)dx=\int\left(t^2+3\right)\cdot\sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt=\int\left(2t^4+6t^2\right)dt=2\int t^4dt+6\int t^2dt=$$
$$=2\int t^4dt+6\int t^2dt=2\frac{t^{4+1}}{4+1}+6\frac{t^{2+1}}{2+1}+C=\frac{2}{5}t^5+2t^3+C=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-3}\right)^5+$$
$$+2\left(\sqrt{x-3}\right)^3+C.$$

При вычислении воспользовались формулой $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$.

Пример 2. Найти $\int\dfrac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+C}}$.

Решение. Заметим, что $e^{4x}=\left(e^{2x}\right)^2$. Целесообразно ввести переменную $e^{2x}=t$. Тогда $de^{2x}=dt$; $\left(e^{2x}\right)'dx=dt$; $e^{2x}2dx=dt$. Заменив всюду под интегралом $e^{2x}dx$ на $\dfrac{dt}{2}$, e^{2x} на t, получим

$$\int\frac{3dt}{2\sqrt{t^2+5}}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+5}}=\frac{3}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+5}\right|+C=\frac{3}{2}\ln\left|e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+5}\right|+C.$$

Пример 3. Найти $\int\dfrac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$.

Решение. Заметим, что $\sin x\,dx=-d\cos x$, т.к.

$d\cos x=\left(\cos x\right)'dx=-\sin x\,dx$. Целесообразно ввести переменную $t=\cos x$. Заменив всюду под интегралом $\sin x\,dx$ на $-dt$, $\cos x$ на t, получим

$$\int\frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}=-2\int\frac{dt}{\sqrt{3+t^2}}=-2\ln\left|t+\sqrt{3+t^2}\right|+C=-2\ln\left|\cos x+\sqrt{3+\cos^2 x}\right|+C.$$

Пример 4. Найти $\int\sin\left(3x+1\right)dx$.

Решение. Заметим, что $dx=\dfrac{1}{3}d\left(3x+1\right)$, т.к. $d\left(3x+1\right)==\left(3x+1\right)'dx=3dx$. Целесообразно ввести переменную $t=3x+1$. Тогда $dx=\dfrac{1}{3}dt$. Заменив всюду под интегралом dx на $\dfrac{1}{3}dt$, $3x+1$ на t; получим

$$\int\sin\left(3x+1\right)dx=\frac{1}{3}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{3}\cos t=-\frac{1}{3}\cos\left(3x+1\right)+C.$$

На основании вышеизложенного можно ввести формулу

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \qquad (1.2)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Тогда $\int e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}\, e^{2x+3}+C.$

Из формулы (1.2) получим

1. $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$.
2. $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$.
3. $\int \frac{1}{(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b)+C$.

2. Интегрирование по частям

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке x. Найдем дифференциал производных этих функций: $d(uv)=u'v\,du+uv'dv$.

Так как по условию функции $u'v$ и uv' непрерывны, можно проинтегрировать обе части этого равенства: $\int d(uv)=\int u'v\,dx+\int uv'\,dv$, или $\int d(uv)=\int v\,du+\int udv$, но $\int d(uv)=uv+C$, следовательно,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (1.3)$$

Формула (1.3) называется ***формулой интегрирования по частям***.

Сущность метода интегрирования по частям вполне соответствует его названию. Дело в том, что при вычислении интеграла этим методом подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляют в виде произведения множителей $u(x)$ и $dv(x)$; при этом dx обязательно входит в $dv(x)$. В результате получается, что заданный интеграл находят по частям: сначала находят $\int dv$, а затем $\int v\,dv$. Естественно, что этот метод применим лишь в случае, если задача нахождения указанных интегралов более проста, чем нахождение заданного интеграла.

Пример 1. Найти $\int x\sin x\,dx$.

Решение. Положим $u=x$; $dv=\sin x\,dx$, тогда $du=dx$; $v=\int \sin x\,dx=-\cos x$.

По формуле (1.3) находим

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x+\int \cos x dx = -x\cos x+\sin x+C.$$

Рассмотрим некоторые конкретные способы разбиения подынтегрального выражения на множители u и dv.

В интегралах вида $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$,

где $P(x)$ – многочлен относительно x; a – некоторое число, полагают $u=P(x)$, а все остальные сомножители – за dv.

Пример 2. Найти $\int (x+5)e^{2x}\,dx$.

Решение. Положим $u = x+5$; $dv = e^{2x}dx$, тогда $du = (x+5)' dx$ или $du = dx$, т.к. $(x+5)' = x' + 5' = 1 + 0 = 1$. Следовательно, оставшиеся сомножители равны dv. Таким образом, $dv = e^{2x}\frac{1}{2}d2x$, интегрируя последнее равенство, получим $v = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,d2x = \frac{1}{2}e^{2x}$.

По формуле (1.3) находим

$$\int (x+5)e^{2x}\,dx = (x+5)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{(x+5)}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int e^{2x}\,d2x =$$

$$= \frac{(x+5)}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

В интегралах вида $\int P(x)\ln|ax|\,dx$, $\int P(x)\arcsin ax\,dx$, $\int P(x)\arccos ax\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}xax\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}\,ax\,dx$ полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители – за u.

Пример 3. Найти $\int (5x^3 + 2x^2 + 3)\ln|x|\,dx$.

Решение. Положим $u = \ln|x|$; $dv = (5x^3 + 2x^2 + 3)dx$, тогда $du = (\ln|x|)' dx = \frac{1}{x}dx$; $\int dv = \int (5x^3 + 2x^2 + 3)dx$, откуда

$$v = \int (5x^3 + 2x^2 + 3)dx = 5\int x^3\,dx + 2\int x^2\,dx + 3\int dx = 5\frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3x =$$

$$= \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x.$$

Следовательно,

$$\int (5x^3 + 2x^2 + 3)\ln|x|\,dx = \left(\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x\right)\ln|x| - \int\left(\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$= \left(\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x\right)\ln|x| - \left[\frac{5}{4}\int\frac{x^4}{x}dx + \frac{2}{3}\int\frac{x^3}{x}dx + 3\int\frac{x}{x}dx\right] = = \left(\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x\right)\ln|x|$$

$$- \left[\frac{5}{4}\int x^3\,dx + \frac{2}{3}\int x^2\,dx + 3\int dx\right] =$$

$$= -\frac{5}{4}\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} - 3x + C = \left(\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x\right)\ln|x| - \frac{5}{16}x^4 - \frac{2}{9}x^3 - 3x + C.$$

3. Интегрирование простейших дробей

Рациональной дробью называется функция $R(x)$, представленная в виде

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами.

Рациональная дробь $R(x)$ называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя.

***Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей следующих четырех типов*:**

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^n}\ (n>1 \text{ натуральное число});$$

$$\frac{ax+b}{px^2+qx+d};\ \frac{ax+b}{\left(px^2+qx+d\right)^n}\ (n>1 \text{ натуральное число}),$$

где $q^2-4p\cdot d \prec 0$, т. е. корни знаменателя мнимые.

Таким образом, для интегрирования правильных рациональных дробей достаточно уметь: 1) интегрировать простейшие дроби; 2) разлагать рациональные дроби на простейшие.

Пример 1. $\int \frac{A}{x-a}dx$.

Решение. Заметим, что $dx = d(x-a)$, т.к. $d(x-a) = (x-a)' dx = dx$.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)} = A\ln(x-a)+C.$$

Пример 2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$.

Решение. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n}\,d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C =$

$$= \frac{A}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}}+C.$$

Для интегрирования простейших дробей третьего вида $\int \frac{ax+b}{px^2+qx+d}dx$ ***вычисляют, используя замену переменных*** $t = \frac{1}{2}\left(px^2+qx+d\right)' = px+\frac{q}{2}$, откуда $x = \frac{(2t+q)}{p};\ dx = \frac{2}{p}dt$.

Пример 3. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2-4x+12}dx$.

Решение. Сделаем замену переменных $t = \frac{1}{2}\left(x^2-4x+12\right)' = = \frac{1}{2}(2x-4) = x-2$; $x = t+2$; $dx = d(t+2)$; $dx = (t+2)'dt$; $dx = dt$.

Заменив всюду под интегралом x на $(t+2)$, dx на dt, получим

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+12}dx = \int \frac{3(t+2)+1}{(t+2)^2-4(t+2)+12}dt = \int \frac{3t+7}{t^2+4t+4-4t-8+12}dt = \int \frac{3t+7}{t^2+8}dt =$$

$$= 3\int \frac{t}{t^2+8}dt + 7\int \frac{dt}{t^2+8}.$$

При вычислении воспользовались формулой $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Второй из полученных интегралов является табличным, а первый находим подстановкой $t^2+8=z$, откуда $d(t^2+8)=dz$; $(t^2+8)'\,dt=dz$; $2t\,dt=dz$; $t\,dt=\frac{1}{2}dz$. Следовательно,

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+12}dx = \frac{3}{2}\int\frac{dz}{z} + 7\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{8}\right)^2} = \frac{3}{2}\ln z + 7\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{8}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(t^2+8\right) + \frac{7}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{8}} + C = \frac{3}{2}\ln\left[(x-2)^2+8\right] + \frac{7}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{8}} + C.$$

Задача 1. Вычислить интегралы:

1)

$$I = \int\frac{x^2dx}{(5+4x^3)^4} = \left| \begin{array}{l} \text{Делаем замену переменных. Так как } x^2 - \text{это почти производная } x^3, \\ \text{то за } t \text{ можно взять } x^3, \text{а лучше } t = 5+4x^3, \text{тогда } dt = d(5+4x^3) = \\ = (5+4x^3)'dx = 12x^2dx. \text{ Выразим отсюда } x^2dx = \frac{1}{12}dt. \end{array} \right| =$$

$$= \int\frac{\frac{1}{12}dt}{t^4} = \frac{1}{12}\int\frac{dt}{t^4} = \frac{1}{12}\int t^{-4}dt = \frac{1}{12}\cdot\frac{t^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{t^3} + c = -\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^3} + C.$$

Можно проверить, что интеграл найден верно. Для этого воспользуемся формулой $(F(x))' = f(x)$.

$$\left(-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^3} + c\right)' = -\frac{1}{36}\left((5+4x^3)^{-3}\right)' = -\frac{1}{36}\cdot(-3)(5+4x^3)^{-4}(5+4x^3)' = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^4}\cdot 12$$

$$= \frac{x^2}{(5+4x^3)^4} - \text{получили подынтегральную функцию.}$$

Ответ: $I = -\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^3} + C$.

2)

$$I = \int\frac{3xdx}{\sqrt{4-x^4}} = 3\int\frac{xdx}{\sqrt{4-(x^2)^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{В числителе стоит почти производная от } x^2. \\ \text{Поэтому } t = x^2 \quad dt = 2xdx, \quad xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| =$$

$$= 3\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2^2-t^4}} = \frac{3}{2}\arcsin\frac{t}{2} + c = \frac{3}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C.$$

Ответ: $I = \frac{3}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C.$

3)

$$I=\int \sin^5 x dx=\int \sin^4 x(\sin x dx)=\int\left(\sin^2 x\right)^2(-d(\cos x))=$$

$$=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^2 d(\cos x)=\begin{vmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx\end{vmatrix}=-\int\left(1-t^2\right)^2 dt=$$

$$=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=\int\left(2t^2-1-t^4\right)dt=2\frac{t^3}{3}-t-\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$$

Ответ : $I=\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$.

Так находятся интегралы, если есть хотя бы одна нечетная степень $\sin x$ и $\cos x$ В случае, если имеются только четные степени, интегралы находят с помощью понижения степени по формулам тригонометрии.

4)

$$I=\int \cos^4 x dx=\left|\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right|=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{8}\int\left(3+2\cos 2x+\cos 4x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3x+2\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}\right)+c=\frac{1}{8}\left(3x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

Ответ: $I=\frac{1}{8}\left(3x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$

5)

$$I=\int\left(\sqrt{x}+2\right)^2\cdot x dx=\begin{vmatrix}\text{Применяем формулу} \\ (\mathrm{a}+\mathrm{b})^2=a^2+2ab+b^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a=\sqrt{x} \quad b=2 \\ \left(\sqrt{x}+2\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2+2\cdot\sqrt{x}\cdot 2+2^2 \\ =x+4\sqrt{x}+4\end{vmatrix}=$$

$$=\int\left(x+4\sqrt{x}+4\right)\cdot x dx=\int(x^2+4x^{1/2}\cdot x+4x)dx=\int\left(x^2+4x^{3/2}+4x\right)dx=$$

$$=\int x^2 dx+4\int x^{3/2}dx+4\int x dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}+4\frac{x^{3/2+1}}{3/2+1}+4\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+4\frac{x^{5/2}}{5/2}+4\frac{x^2}{2}+C=\frac{1}{3}x+\frac{4\cdot 2}{5}x^{5/2}+2x^2+C.$$

Ответ: $I=\frac{1}{3}x+\frac{8}{5}x^{5/2}+2x^2+C.$

6)

$$I=\int x\ln x dx=\left|\begin{matrix}\text{Применяем формулу интегрирования}\\ \text{по частям } \int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}u=\ln x & v=xdx\\ du=\frac{dx}{x} & v=\int dv=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+c=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Ответ: $I=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^4}{4}+C.$

7)

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\left|\begin{matrix}\text{Зделаем замену переменных}\\ t=\frac{1}{2}(x^2+x+1)'=\frac{1}{2}(2x+1)=x+\frac{1}{2}.\\ \Rightarrow x=t-\frac{1}{2}, dx=dt, x^2+x+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+t-\frac{1}{2}+1=t^2-2\cdot t\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+t-\frac{1}{2}+1=\\ =t^2+\frac{3}{4}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}.=\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2t}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Ответ: 2)

Контрольные варианты к задаче 1.

ЗАДАНИЕ. Вычислить неопределенные интегралы:

1. 1) $\int\frac{x^2dx}{\left(3+2x^3\right)^2}$, 2) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$, 3) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$,

4) $\int\frac{x^2dx}{x^6+4}$, 5) $\int\left(x^2+1\right)^2dx$, 6) $\int x^2\cdot\ln xdx$, 7) $\int\frac{1}{x^2-2x+3}dx$.

2. 1) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$, 2) $\int\frac{\ln x}{5x}dx$, 3) $\int\frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

4) $\int\frac{xdx}{x^4+1}$, 5) $\int(\sqrt{x}+2)^2\cdot xdx$, 6) $\int x^3\ln xdx$ 7) $\int\frac{1}{x^2+4x-12}dx$,

3. 1) $\int\frac{x}{\sqrt{3-2x^2}}dx$, 2) $\int\frac{tg^3x}{\cos^2x}dx$, 3) $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$, 4) $\int\frac{x^2dx}{2x^3+9}$,

5) $\int(1+\sqrt{x})^2\cdot 2xdx$, 6) $\int x\ \ln xdx$, 7) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

4. 1) $\int 5x\sqrt{1-2x^2}dx$, 2) $\int \frac{2x^2dx}{8x^3-7}$, 3) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$, ,4) $\int \frac{tg^3x}{\sin^2 x}dx$, 5) $\int (x^2+1)^2\cdot\sqrt{x}dx$, 6) $\int (2x+3)\cos xdx$, 7) $\int \frac{1}{x^2+4x+13}dx$.

5. 1) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{2\sin x+1}}$, 2) $\int \frac{e^x+\sin x}{e^x-\cos x}dx$, 3) $\int \frac{2^{arctgx}}{1+x^2}dx$, 4) $\int \frac{e^xdx}{e^{2x}+4}$,

5) $\int (2x+3)^2\cdot xdx$, 6) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ 7) $\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$.

6. 1) $\int \frac{x^2}{x^3-3}dx$, 2) $\int \frac{x+arctgx}{1+x^2}dx$, 3) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$, 4) $\int \frac{e^xdx}{\sqrt{25-16e^{2x}}}$,

5) $\int (x^3+2)\cdot xdx$, 6) $\int \sqrt{x}\ln xdx$, 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-2}}dx$.

7. 1) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$, 2) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$, 3) $\int x\sin x^2dx$, 4) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-25x^2}}$,

5) $\int (x+x^2)dx$ 6) $\int \sqrt{x}\ln xdx$ 7) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$.

8. 1) $\int \frac{(3-\sqrt{x})^2}{x^2}dx$, 2) $\int \sin^2 x\cdot\cos xdx$ 3) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$, 4) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-9x^2}}$,

5) $\int x\cdot(x^2+3)dx$, 6) $\int x\ln xdx$, 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$.

9. 1) $\int \frac{x^5+x+\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$, 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+7}}$, 3) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$, 4) $\int \frac{4xdx}{\sqrt{1-x^4}}$,

5) $\int (2x+3)^2\cdot xdx$, 6) $\int x\cdot\cos xdx$, 7) $\int \frac{1}{x^2-4x+1}dx$.

10. 1) $\int \frac{xdx}{2x^2-1}$, 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$, 3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+\cos x}}dx$, 4) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$,

5) $\int (\sqrt{x}+3)^2\cdot xdx$, 6) $\int (2-x)\cdot e^xdx$, 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$.

11. 1) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$, 2) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$, 3) $\int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$, 4) $\int \frac{e^xdx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$,

5) $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$, 6) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$, 7) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x-7}dx$.

12. 1) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$, 2) $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx$, 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, 4) $\int \frac{3^{arctgx}}{1+x^2}dx$,

5) $\int x\sin 4xdx$, 6) $\int x^4\ln xdx$, 7) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$.

13. 1) $\int 2x\sqrt{x^2+4}dx$, 2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^3-2)}}$, 3) $\int \frac{2+\ln x}{2x}dx$, 4) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{5+x^6}}$,

5) $\int (2x+1)\sin xdx$, 6) $\int arctgxdx$, 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x-16}}dx$.

14. 1) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 2) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x - 7}}{x}dx$, 3) $\int xe^{x^2}dx$, 4) $\int \frac{x^2 dx}{4+x^6}$,

5) $\int \frac{\ln x}{x^5}dx$, 6) $\int \arcsin x dx$, 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+4}}dx$.

15. 1) $\int \frac{xdx}{e^{x^2-1}}$, 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x + 10}}$, 3) $\int \left(2x\sqrt{x} - 7x\right)^2 dx$, 4) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$,

5) $\int x\sin(3x+5)dx$, 6) $\int x^2 \ln x dx$, 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+10x-21}}dx$.

16. 1) $\int \frac{e^{3x}dx}{1-e^{3x}}$, 2) $\int \sqrt{2-\cos x}\cdot \sin x dx$, 3) $\int \frac{1 - arctgx}{1+x^2}dx$, 4) $\int \frac{\left(2x\cdot\sqrt{x}-3\right)^2}{x}dx$, 5) $\int x\cdot arctgx dx$, 6) $\int x^3 \cdot \ln x dx$, 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}dx$

.