2 Определенный интеграл и его геометрический смысл

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором промежутке X, а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Определение. Приращение $F(b)-F(a)$ любой из первообразных функций $F(x)+C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется ***определенным интегралом*** от a до b функции $f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$

.

Числа a и b называются пределами интегрирования: $a-$нижним, $b-$ верхним. Отрезок $[a;b]$ называется ***отрезком интегрирования***. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, а переменная $x-$***переменной интегрирования***. Таким образом, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (2.4)$$

Равенство (2.1) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Существует и другой подход к введению понятия определенного интеграла, основанный на рассмотрении пределов интегральных сумм, который в большей степени приспособлен для приложений. Рассмотрим его на примере вычисления площади криволинейной трапеции.

Пусть дана фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$, отрезком $[a;b]$ и прямыми $x=a$; $x=b$ (рис. 1). Такую фигуру называют криволинейной трапецией. Найдем ее площадь.

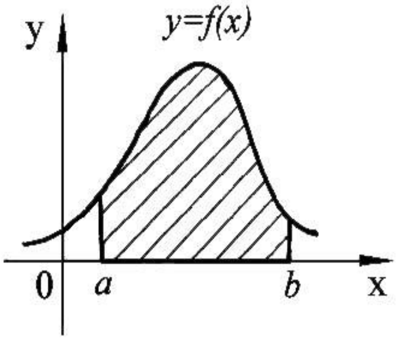


Рис. 1

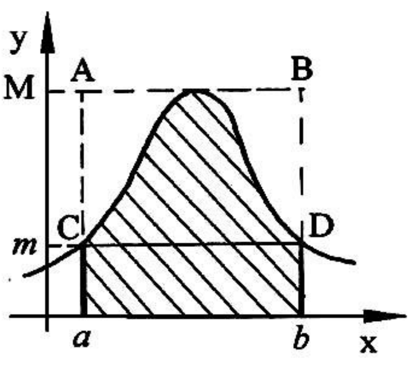


Рис. 2

Заметим, что на отрезке $[a;b]$ можно указать такую точку C, что площадь S криволинейной трапеции равна

$$S = f(C)(b-a). \qquad (2.5)$$

Действительно, пусть $M-$ наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, а $m-$наименьшее. Проведем прямые $y=M$ и $y=m$. Тогда криволинейная трапеция целиком содержится в прямоугольнике $aABb$ и содержит целиком прямоугольник $aCDd$ (рис. 2).

Поэтому $S_{aCDd} < S < S_{aABb}$ или $m(b-a) < S < M(b-a)$, т.к. $S_{aCDd} = m(b-a)$; $S_{aABb} = M(b-a)$. Возьмем число $p = \dfrac{S}{(b-a)}$ и $m < p < M$.

На отрезке $[a;b]$ возьмем такую точку C, что $f(C) = p$. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то каждому значению функции p соответствует хотя бы одно значение ее аргумента C, лежащего внутри отрезка $[a;b]$. Тогда $S = p(b-a)$. Данное свойство называется ***теоремой о среднем.***

Найдем теперь площадь криволинейной трапеции S через определенный интеграл. Разобьем криволинейную трапецию на n полос так, как показано на рис. 3. При этом на отрезке $[a;b]$ появились точки x_1, x_2,..., x_{n-1}.

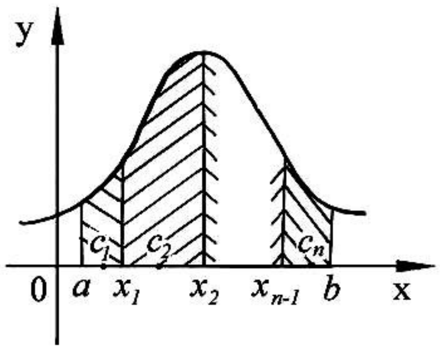


Рис 3

В соответствии с формулой (2.5) найдем для первой полосы точку c_1, $a \le c_1 \le x_1$ такую, что площадь первой полосы равна $f(c_1)(x_1 - a)$. Для второй полосы найдем точку c_2, $x_1 \le c_2 \le x_2$ такую, что площадь полосы равна $f(c_2)(x_2 - x_1)$. Поступаем так для всех n полос, т.к. площадь криволинейной трапеции равна сумме площадей полос, на которую она разбита:

$$S = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1}).$$

Такого типа равенство будет иметь место, как бы мы не разбивали криволинейную трапецию на полосы. Длину наибольшего из отрезков обозначим через λ. Перейдем в нем к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$S = \lim_{\lambda \to 0}\left[f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1}) \right].$$

Обозначим

$$\lim_{\lambda \to 0}\left[f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1}) \right],$$

через выражение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ получим

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (2.6)$$

Таким образом, ввели определенный интеграл через предел особого рода сумм (***интегральных сумм***).

Определение. Пусть дана функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$, где $a<b$. Выполним следующие операции:

1.Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками x_i $(i=0,1,2,\ldots,n)$, так что $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

2.Величину $\lambda=\max\limits_{i=0,\ldots,n}\left(x_{i-1}-x_i\right)$ назовем шагом разбиения.

3.На каждом из отрезков $\left[x_{i-1};x_i\right]$ зафиксируем произвольную точку C_i, $C_i\in\left[x_{i-1};x_i\right]$.

4.Составим сумму всех произведений $f\left(c_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)$, $i=1,\ldots,n$; $\sigma_n=f\left(c_1\right)\left(x_1-a\right)+f\left(c_2\right)\left(x_2-x_1\right)+\ldots+f\left(c_n\right)\left(b-x_{n-1}\right)$ или в сокращенном виде

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(c_1\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i\ , \qquad (2.7)$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Суммы вида (1.7) называются ***интегральными суммами функции*** $f\left(x\right)$.

Очевидно, что при различных разбиениях отрезка $[a;b]$ на части получим различные интегральные суммы вида (2.4). Таким образом, для данной функции $f\left(x\right)$ и данного отрезка $[a;b]$ можно составить бесконечное множество интегральных сумм вида (2.4), которые зависят от числа n и от выбора точек деления x_i и точек $c_i\in\left[x_{i-1};x_i\right]$. В примере вычисления площади криволинейной трапеции точки c_i подбирались специально, что не противоречит определению определенного интеграла через пределы интегральных сумм.

Определение. Если при любой последовательности разбиений отрезка $[a;b]$ таких, что $\lambda=\max\Delta\, x_i\to 0\quad(n\to\infty)$, при любом выборе точек $c_i\in\left[x_{i-1};x_i\right]$ интегральная сумма $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i$ стремится к одному и тому же конечному числу A: $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum f\left(c_i\right)\Delta x_i=A$, то число A называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$. Итак, по определению,

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f\left(C_i\right)\mathit{\Delta} x_i\ . \qquad (2.8)$$

Заметим без доказательств, что предел в правой части равенства (2.8) существует и конечен, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Если $f(x)$ непрерывна и неотрицательна, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$; $x=b$ (см. рис. 1), т.е.

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.9}$$

В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла. Без доказательства заметим, что оба определения эквивалентны. Второе определение помогает получить приложение определенного интеграла (вычисление площади и т.д.), а формула Ньютона - Лейбница позволяет вычислить определенный интеграл без вычисления предела интегральной суммы.

Пример 4. Вычислить $\int\limits_1^4\left(1+5x+\dfrac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx$.

<u>Решение.</u> Используя правила 1 и 2, представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_1^4\left(1+5x+\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx=\int\limits_1^4 dx+5\int\limits_1^4 x\,dx+\frac{3}{2}\int\limits_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx=x\Big|_1^4+5\frac{x^2}{2}\Big|_1^4+\frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4=$$

$$=x\Big|_1^4+\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4+x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=(4-1)+\frac{5}{2}\left(4^2-1^2\right)+\left(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=3+\frac{75}{2}+7=\frac{95}{2}.$$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx$.

<u>Решение.</u> Положим $u=\operatorname{arctg}x$; $dv=x\,dx$, тогда

$$du=\left(\operatorname{arctg}x\right)'dx=\frac{1}{1+x^2}dx,\ v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1\left(x\operatorname{arctg}x\right)dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}1-\frac{0^2}{2}\mathrm{arctg}0-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1 dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}-0=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 6. Вычислить $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

<u>**Решение.**</u> Сделаем замену $t=x^2+9$, тогда $dt=d\left(x^2+9\right)$; $dt=\left(x^2+9\right)'dx$; $dt=2x\,dx$; $dx=\frac{dt}{2x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t=x^2+9$; если $x=0$, то $t_{нижн}=0^2+9=9$; если $x=4$, то $t_{верхн}=4^2+9=25$.

Поэтому

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx=\int_9^{25}x\sqrt{t}\frac{dt}{2x}=\frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\int_9^{25}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_9^{25}=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_9^{25}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(5^{2+\frac{3}{2}}-3^{2+\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(5^3-3^3\right)=\frac{1}{3}(125-27)=\frac{98}{3}.$$

<u>**Задача 2**</u>

1) Вычислить $\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

<u>Решение.</u> Сделаем замену $t=\ln x$, тогда $dt=d\ln x$; $dt=(\ln x)'dx$; $dt=\frac{1}{x}dx$; $dx=x\,dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t=\ln x$; если $x=1$, то $t_{нижн}=\ln 1=0$; если $x=\sqrt{e}$, то $t_{верхн}=\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$. Таким образом, изменению переменной от $x=1$ до $x=\sqrt{e}$ соответствует изменение переменной t от $t_{нижн}=0$ до $t_{верхн}=\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\int_{1}^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{x\,dt}{x\sqrt{1-t^2}}=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=$$

$$=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}.$$

2) Вычислить $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$.

Решение. Положим $1-\cos x=t$,тогда $dt=(1-\cos x)'\,dx$; $dt=\sin x\,dx$; $dx=\dfrac{dt}{\sin x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t=1-\cos x$; если $x=\dfrac{\pi}{2}$, то $t_{нижн}=1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-0=1$; если $x=\pi$, то $t_{верхн}=1-\cos\pi=1-(-1)=2$. Таким образом, изменению переменной x от $x=\dfrac{\pi}{2}$ до x=2 соответствует изменение переменной t от $t_{нижн}=1$ до $t_{верхн}=2$. Следовательно,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}=\int_{1}^{2}\frac{2\sin x\,\frac{dt}{\sin x}}{t^2}=2\int_{1}^{2}\frac{dt}{t^2}=2\int_{1}^{2}t^{-2}dt=2\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_{1}^{2}=2\frac{t^{-1}}{-1}\Bigg|_{1}^{2}=$$

$$=-2\left(\frac{1}{2}-1\right)=-2\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

3) Вычислить $\int_{0}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$.

Решение. Положим $8-x=t$, тогда $dt=(8-x)'\,dx$; $dt=-1dx$; $dx=-dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t=8-x$; если $x=0$, то $t_{нижн}=8-0=8$; если $x=7$, то $t_{верхн}=8-7=1$. Таким образом, изменению переменной x от $x=0$ до $x=7$ соответствует изменение переменной t от $t_{нижн}=8$ до $t_{верхн}=1$, следовательно,

$$\int_{0}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}=\int_{8}^{1}-\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}=-\int_{8}^{1}t^{-\frac{2}{3}}dt=-\frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Bigg|_{8}^{1}=-\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Bigg|_{8}^{1}=-3\sqrt[3]{t}\Big|_{8}^{1}=$$

$$=-3\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{8}\right)=-3(1-2)=3.$$

Контрольные варианты к задаче 2.

ЗАДАНИЕ. Вычислить определенные интегралы:

1. 1) $\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2-1\right)^3 x\,dx$;

2) $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{2-\cos x}$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi}\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)dx$

2. 1) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x\,dx}{2\sqrt{1+x^2}}$;

2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\cos^2 x}$;

3) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}$.

3. 1) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{128x\,dx}{\left(x^2+1\right)^5}$;

2) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

3 $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx$.

4. 1) $\int\limits_{2}^{3}\frac{15x\,dx}{\left(x^2-1\right)^3}$;

2) $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}}x\sin x^2\,dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sin 2x}$.

5. 1) $\int\limits_{0}^{1}\frac{6x^2\,dx}{1+2x^3}$;

2) $\int\limits_{0}^{1}xe^{x^2}\,dx$;

3) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

6. 1) $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{3-\cos x}$

2) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$;

3) $\int\limits_{0}^{1}\left(x^2+3\right)^2 dx$.

7. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{2+\sin x}$;

8. 1) $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{2-\cos x}$;

2) $\int_{6}^{7}(x-5)^2\,dx$;

3) $\int_{0}^{1}x\left(x^2+3\right)^4\,dx$.

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[5]{\cos x}\sin x\cdot dx$;

3) $\int_{0}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}\cdot dx$.

9. 1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^3 x\cdot dx$;

2) $\int_{-0,25\pi}^{0,25\pi}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\cdot dx$;

3) $\int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x\sin x^2\cdot dx$.

10. 1) $\int_{0}^{1}\frac{e^x\,dx}{e^x+5}$;

2) $\int_{1}^{2}\left(x^5+x\right)^2 dx$;

3) $\int_{1}^{2}\frac{6x+5}{\left(3x^2+5x+1\right)^2}$.

11.1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}e^{\cos x}\sin x\,dx$;

2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$.

12. 1) $\int_{0}^{1}3e^{x^3}x^2\,dx$;

2) $\int_{0}^{1}(x+2)^2\,dx$;

3) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

13. 1) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2+4}$;

2) $\int_{0}^{1}xe^{x^2}\,dx$;

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg} x\,dx$

14. 1) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{6-5x+x^2}$;

2) $\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)x\,dx$;

3) $\int_{0}^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

15. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$; **16.** 1) $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_1^2 (x+1)^2 \cdot x\,dx$;

3) $\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x^2}$. 3) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}$.

Как было показано выше с помощью определенного интеграла можно вычислять площади плоских фигур, ограниченных кривыми. Напомним, что кривые могут быть заданы **различными способами**:

а) если фигура представляет из себя **криволинейную трапецию** вида. $f(x)>0$

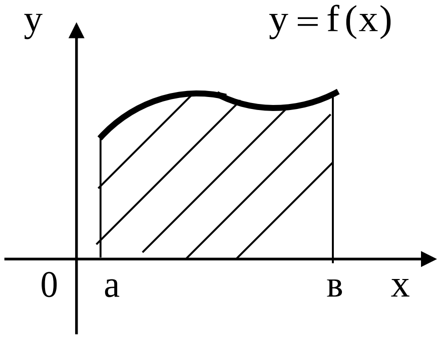
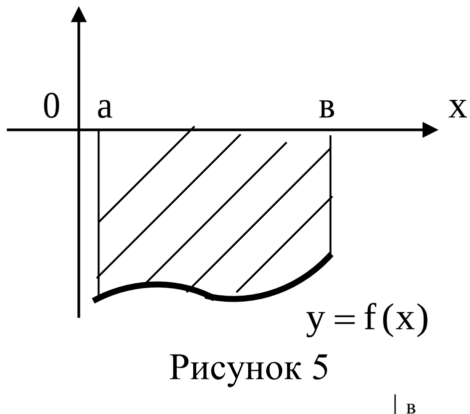


Рисунок 4

Тогда её площадь вычисляется по формуле:

$$S_ф = S_{кр.тр.} = \int\limits_а^в f(x)\,dx;$$

б) если криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox, т.е. $f(x)<0$ тогда исходя из **свойств определенного интеграла**



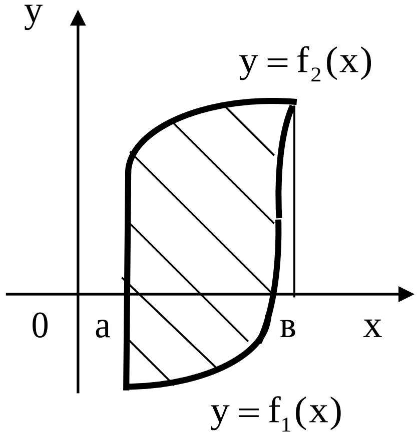
$$S_ф = -\int\limits_а^в f(x)\,dx.$$

Рисунок 5

В общем случае $S_ф = \left|\int\limits_а^в f(x)\,dx\right|$;

в) если плоская фигура имеет сложную форму, т.е. прямые $x = a$; $x = в$ «вырождаются» в точки, то фигуру следует разбить на части так, чтобы можно было применить известные формулы.

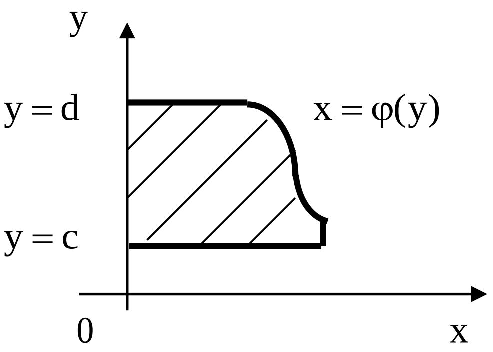
Проиллюстрируем **некоторые** возможные варианты:



$$S_ф = \int_a^в (f_2(x) - f_1(x))dx;$$

Рисунок 6

г) если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, то $\Rightarrow$



$$S_ф = \int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

Рисунок 7

<u>Задача 3.</u> 1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 5x + 6$ и прямой $y = x + 1$.

Решение

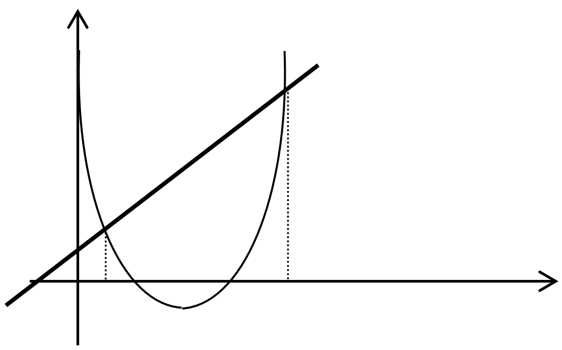


Рисунок 8

Найдем точки пересечения графиков этих линий (рис. 8):

$$x^2 - 5x + 6 = x + 1, \quad x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2},$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5.$$

Так как $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)\,dx$, то пло-

$$S=\int_1^5\left[\left(x+1\right)-\left(x^2-5x+6\right)\right]dx=\int_1^5\left(6x-5-x^2\right)dx=\left(6\frac{x^2}{2}-5x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^5=$$

$$=\left(6\cdot\frac{5^2}{2}-5\cdot5-\frac{5^3}{3}\right)-\left(6\cdot\frac{1^2}{2}-5\cdot1-\frac{1^3}{3}\right)=\left(75-25-\frac{125}{3}\right)-\left(3-5-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=50-\frac{125}{3}+2+\frac{1}{3}=52-\frac{124}{3}=\frac{156-124}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $S=\dfrac{32}{3}$ м^2.

2) Вычислить площадь между параболами $y=4x-x^2$ и $y=x^2-6$ (рис.9).

<u>Решение.</u> Сначала найдем точки пересечения парабол, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=4x-x^2; \\ y=x^2-6, \end{cases}$$

т.е. найдем точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют одновременно уравнениям обеих парабол. Из этой системы

$x^2-6=4x-x^2$,

$2x^2-4x-6=0$,

$x^2-2x-3=0$ и

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4(-3)}}{2}=\frac{2\pm4}{2} \text{ или } x_1=-1; x_2=3.$$

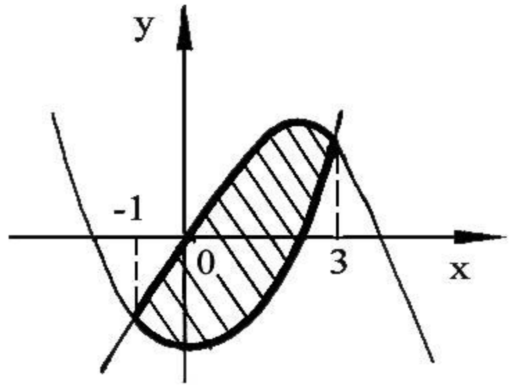


Рис.9

Тогда по формуле (1.18) искомая площадь S будет равна:

$$S=\int_{-1}^{3}\left[\left(4x-x^2\right)-\left(x^2-6\right)\right]dx=\int_{-1}^{3}\left[6+4x-2x^2\right]dx=$$

$$=\left[6x+2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]\Big|_{-1}^{3}=\left[6\cdot3+2\cdot3^2-\frac{2}{3}\cdot3^3\right]-$$

$$-\left[6\cdot(-1)+2\cdot(-1)^2-\frac{2}{3}\cdot(-1)^3\right]=18-\left[-\frac{10}{3}\right]=18+\frac{10}{3}=64.$$

Контрольные варианты к задаче 3.

ЗАДАНИЕ. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. 1) $y = 6x - x^2, \quad y = 0;$ 2) $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 4.$

2. 1) $y = x^2 + 4x, \quad x - y + 4 = 0.$ 2) $x\,y = 6, \quad y = 7 - x.$

3. 1) $y = x^3, \quad y = x;$ 2) $y = x^2 - 6x + 10, \quad y = x.$

4. 1) $y = x^3, \quad y = 2x;$ 2) $x^2 = 9y, \quad x = 3y - 6.$

5. 1) $y^2 = 4x, \quad y = x;$ 2) $y = 2 - x^2, \quad y^3 = x^2.$

6. 1) $y^2 = 4x, \quad y = \frac{1}{4}x^2;$ 2) $x = 2 - y - y^2, \quad x = 0.$

7. 1) $3y = x^2, \quad 3x = y^2;$ 2) $y = 6x - x^2 - 5, \quad y = 0.$

8. 1) $y = x^2 - 3x, \quad y = 4 - 3x;$ 2) $y = x^2 - 5x + 6, \quad x = 0, \quad y = 0.$

9. 1) $y = 2x - x^2, \quad y = x;$ 2) $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 1.$

10. 1) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 4 - x;$ 2) $y^3 = x^2, \quad y = 1.$

11. 1) $x = y^2, \quad x = \frac{3}{4}y^2 + 1;$ 2) $y = \ln x, \quad x = e, \quad y = 0.$

12. 1) $y = x^2, \quad 2x - y + 3 = 0;$ 2) $x\,y = 6, \quad x = 1, \quad x = e, \quad y = 0.$

13. 1) $y = 4 - x^2, \quad y = 0;$ 2) $y^2 = 9x, \quad y = 3x.$

14. 1) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad x + 2y - 6 = 0;$ 2) $y = x^2, \quad y^2 = x.$

15. 1) $4x = y^2, \quad 4y = x^2;$ 2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3, \quad y = 1.$

16. 1) $y = x^2, \quad y = x + 2;$ 2) $x = 8y - y^2 - 7, \quad x = 0.$

17. 1) $y = 6x - x^2, \quad y = 0;$ 2) $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 4.$

18. 1) $y = x^2 + 4x, \quad x - y + 4 = 0.$ 2) $x\,y = 6, \quad y = 7 - x.$

19. 1) $y = x^3, \quad y = x;$ 2) $y = x^2 - 6x + 10, \quad y = x.$

20. 1) $y = x^3, \quad y = 2x;$ 2) $x^2 = 9y, \quad x = 3y - 6.$

21. 1) $y^2 = 4x, \quad y = x;$ 2) $y = 2 - x^2, \quad y^3 = x^2.$

22. 1) $y^2 = 4x, \quad y = \frac{1}{4}x^2;$ 2) $x = 2 - y - y^2, \quad x = 0.$

23. 1) $3y = x^2, \quad 3x = y^2;$ 2) $y = 6x - x^2 - 5, \quad y = 0.$

24. 1) $y = x^2 - 3x, \quad y = 4 - 3x;$ 2) $y = x^2 - 5x + 6, \quad x = 0, \quad y = 0.$

25. 1) $y = 2x - x^2, \quad y = x;$ 2) $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 1.$

26. 1) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 4 - x;$ 2) $y^3 = x^2, \quad y = 1.$

27. 1) $x = y^2, \quad x = \frac{3}{4}y^2 + 1;$ 2) $y = \ln x, \quad x = e, \quad y = 0.$

28. 1) $y = x^2, \quad 2x - y + 3 = 0;$ 2) $x\, y = 6, \quad x = 1, \quad x = e, \quad y = 0.$

29. 1) $y = 4 - x^2, \quad y = 0;$ 2) $y^2 = 9x, \quad y = 3x.$

30. 1) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad x + 2y - 6 = 0;$ 2) $y = x^2, \quad y^2 = x.$

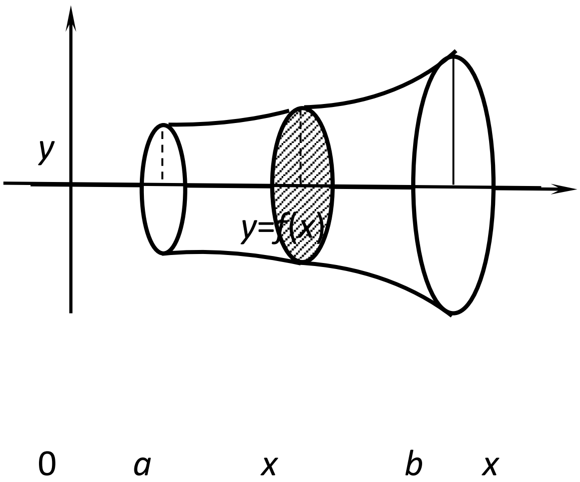
Вычисление объема тела вращения

Пусть функция $f(x)$, $x \in [a; b]$, непрерывна на отрезке $[a; b]$. Требуется вычислить объем V тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$; $y = 0$; $x = a$; $x = b$ (рис. 10).

Так как любое поперечное сечение тела есть круг радиусом $|y|$, то площадь сечения будет $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$.

Проинтегрировав сечение на отрезке $[a; b]$, найдем

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \qquad (2.10)$$



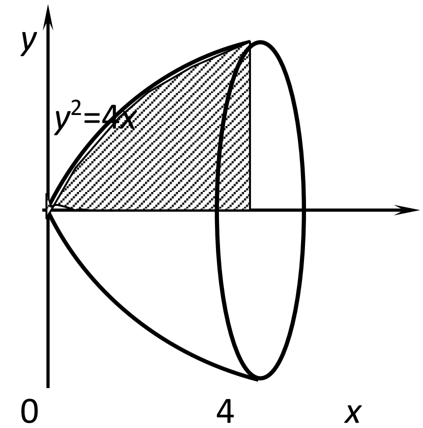


Рис.11

Пример 7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 4$ (рис. 19).

<u>**Решение.**</u> Такое тело называется параболоидом вращения. Применив формулу (2.27), получим

$$V = \pi\int_0^4 4x\,dx = 4\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = 2\pi 4^2 - 2\pi 0^2 = 32\pi.$$

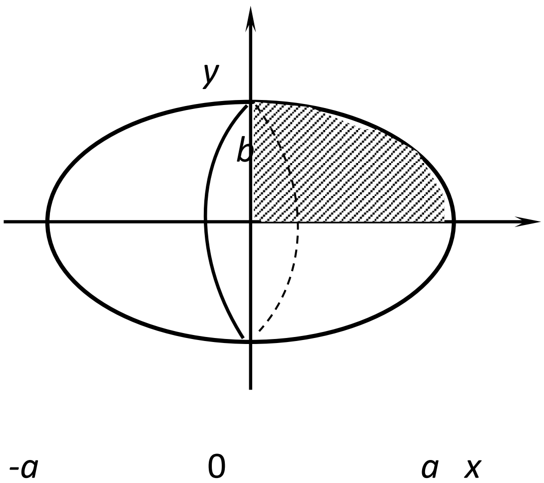
Пример 8. Вычислить объем тела, образованного вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси $0x$ (рис. 12).

<u>**Решение.**</u> Рассматриваемое тело называется ***эллипсоидом вращения***. Эллипс пересекает ось $0x$ в точках $x = -a$ и $x = a$.

Из уравнения эллипса находим

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right).$$

Ввиду симметричности эллипса относительно оси $0y$ вычислим объем в пределах от 0 до a и полученный результат удвоим:



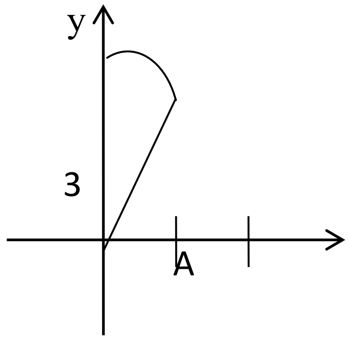
$$V=2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}a^2dx- \qquad -2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}x^2dx=$$

$$2\pi b^2\int_0^a dx-2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a x^2dx=2\pi b^2x\Big|_0^a-\ 2\pi\frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^a=$$

$$=2\pi b^2a-2\pi\frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3}=\frac{2\pi b^2a^3}{a^2}-\frac{2\pi b^2a^3}{3a^2}=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4\pi ab^2}{3}.$$

Задача 4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=2x;\quad y=3-x^2,\quad x=0\ (x\geq 0)$.

Решение



Найдем точки пересечения параболы $y=3-x^2$ и прямой $y=2x$ (рис. 9).

$$2x=3-x^2,$$

$$x^2+2x-3=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2},$$

$$x_1=-3,\quad x_2=1.$$

Выбираем, как дано, x больше нуля, значит, $x=1$. Так как объем тела вращения $V=\pi\int_a^b y^2dx$, а в данном случае $V=\pi\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx$, объем

$$V=\pi\int_0^1\left[\left(3-x^2\right)^2-\left(2x)^2\right)\right]dx=\pi\int_0^1\left(9-6x^2+x^4-4x^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(9-10x^2+x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left[9x-10\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1=\pi\left(9-\frac{10}{3}+\frac{1}{5}\right)=\pi\frac{135-50+3}{15}=\pi\frac{88}{15}\approx 18,43.$$

Ответ: $V\approx 18,43$ см^3..

Контрольные варианты к задаче 4.

ЗАДАНИЕ Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

1.	1) $x\,y=5,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=5;$	2) $y^2=x^3,\quad x=1,\quad y=0.$
2.	1) $y=9-x^2,\quad y=0;$	2) $2x+3y-6=0,\quad x=0,\quad y=0.$
3.	1) $y=2x-x^2,\quad y=0;$	2) $x\,y=2,\quad x=2,\quad x=4.$
4.	1) $y=\sqrt{5-x},\quad x=-5,\quad y=0;$	2) $y=x^2,\quad 2x-y+3=0.$
5.	1) $y=e^x,\quad x=0,\quad x=1,\quad y=0;$	2) $y=x^2-9,\quad y=0.$
6.	1) $y=\ln x,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=2;$	2) $y=4x-x^2,\quad y=0.$
7.	1) $y=-x^2+8,\quad y=x^2;$	2) $x\,y=4,\quad x=1,\quad x=4,\quad y=0.$
8.	1) $2y^2=x^3,\quad x=4;$	2) $y=e^x,\quad x=0,\quad y=0,\quad x=1.$
9.	1) $y^2=2x,\quad x=3,\quad y=0;$	2) $y^2=x^3,\quad y=0,\quad x=1.$
10.	1) $y^2=2x,\quad 2x=3;$	2) $y=8x-x^2,\quad y=0.$
11.	1) $y^2=9x,\quad y=3x;$	2) $x\,y=1,\quad x=1,\quad x=5.$
12.	1) $y=\sin x,\quad x=0,\quad x=\pi,\quad y=0;$	2) $y^2=4x,\quad x=4,\quad y=0.$
13.	1) $y=x^2+1,\quad y=0,\quad x=-2,\quad x=2;$	2) $x\,y=2,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=2.$
14.	1) $x\,y=4,\quad 2x+y-6=0;$	2) $y^2=2x,\quad x^2=2y.$
15.	1) $y=3x-x^2,\quad y=0;$	2) $x\,y=1,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=3.$
16.	1) $y=e^{2x},\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1;$	2) $5x+3y-15=0,\quad y=0,\quad x=0.$
17.	1) $x\,y=5,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=5;$	2) $y^2=x^3,\quad x=1,\quad y=0.$
18.	1) $y=9-x^2,\quad y=0;$	2) $2x+3y-6=0,\quad x=0,\quad y=0.$
19.	1) $y=2x-x^2,\quad y=0;$	2) $x\,y=2,\quad x=2,\quad x=4.$
20.	1) $y=\sqrt{5-x},\quad x=-5,\quad y=0;$	2) $y=x^2,\quad 2x-y+3=0.$
21.	1) $y=e^x,\quad x=0,\quad x=1,\quad y=0;$	2) $y=x^2-9,\quad y=0.$

22.	1) $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2;$	2) $y = 4x - x^2, \quad y = 0.$
23.	1) $y = -x^2 + 8, \quad y = x^2;$	2) $x\,y = 4, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0.$
24.	1) $2y^2 = x^3, \quad x = 4;$	2) $y = e^x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1.$
25.	1) $y^2 = 2x, \quad x = 3, \quad y = 0;$	2) $y^2 = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1.$
26.	1) $y^2 = 2x, \quad 2x = 3;$	2) $y = 8x - x^2, \quad y = 0.$
27.	1) $y^2 = 9x, \quad y = 3x;$	2) $x\,y = 1, \quad x = 1, \quad x = 5.$
28.	1) $y = \sin x, \quad x = 0, \quad x = \pi, \quad y = 0;$	2) $y^2 = 4x, \quad x = 4, \quad y = 0.$
29.	1) $y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2;$	2) $x\,y = 2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$
30.	1) $x\,y = 4, \quad 2x + y - 6 = 0;$	2) $y^2 = 2x, \quad x^2 = 2y.$