Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные различных порядков. Например:

1) $y' \cdot x - x^2 - y = 0$
2) $(x - y)\, dx + (x + y)\, dy = 0$
3) $y'' + 2y' - y = 0,$

т. е. дифференциальное уравнение может содержать производные $y'\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ или дифференциалы dx и dy независимой переменной и функции.

Определение. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, удовлетворяющая этому уравнению (т. е. функция, которая обращает данное уравнение в тождество).

Дифференциальные уравнения первого порядка

Так как дифференциальное уравнение первого порядка (условимся в дальнейшем писать д.у.1) содержит независимую переменную x, функцию y и ее производную y', общий вид д.у.1 будет выглядеть как

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \qquad (1)$$

Задача 1.Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида $M_1(x) \cdot M_2(y) \cdot dx + N_1(x) \cdot N_2(y) \cdot dy = 0.$ называется дифференциальным уравнением с **разделенными переменными.**

Его можно после преобразований записать в виде $\dfrac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \dfrac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$ или

$$f_1(x)\ dx = -f_2(y)\ dy.$$

Проинтегрируем обе части уравнения, получим так называемый общий интеграл (или общее решение).

При решении дифференциального уравнения с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим **алгоритмом (правилом) разделения переменных.**

Первый шаг. Если дифференциальное уравнение содержит производную y', ее следует записать в виде отношения дифференциалов: $y' = \dfrac{dy}{dx}.$

Второй шаг. Умножим уравнение на dx, затем сгруппируем слагаемые, содержащие дифференциал функции и дифференциал независимой переменной $(dy \quad и \quad dx)$.

Третий шаг. Выражения, полученные при dy и dx, представить в виде произведения двух множителей, каждый из которых содержит только одну переменную (либо x, либо y). Если после этого уравнение примет вид

$$M_1(x) \cdot M_2(y) \cdot dx + N_1(x) \cdot N_2(y) \cdot dy = 0,$$

то, разделив его на произведение $M_2(y) \cdot N_1(x)$, получим дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Четвертый шаг. Интегрируя почленно уравнение, получим общее решение исходного уравнения (или его общий интеграл).

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = c.$$

Пример1

$$(1+x)\cdot y\,dx + (1-y)\cdot x\,dy = 0,$$

Решение Разделим уравнение на произведение $y \cdot x$. Получим уравнение

$$\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0; \qquad \left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)\,dy = 0.$$

Интегрируя, получим $\int \frac{1}{x}dx + \int dx + \int \frac{dy}{y} - \int dy = 0;$

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = c$$

или

$$\ln|xy| + x - y = c.$$

Последнее соотношение есть общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Пример2 $y' = -\dfrac{y}{x},$

Решение Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$, умножим на dx, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \qquad dy = -\frac{y}{x}\cdot dx; \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|.$$

$\ln|y| = \ln\left|\dfrac{c}{x}\right|;$ $\quad y = \dfrac{c}{x}$ – общее решение дифференциального уравнения.

Пример3 $\left(x^2y^2 - x^2y\right)dy - xy^2\,dx = 0.$

Решение Преобразуем уравнение, вынося общий множитель слева x^2: $x^2\cdot\left(y^2-y\right)dy = xy^2\,dx.$ Разделим левую и правую части уравнения на произведение $x^2\cdot y^2$, получим

$$\frac{y^2-y}{y^2}\,dy = \frac{x\,dx}{x^2}, \qquad \text{или} \qquad \frac{y-1}{y}dy = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y-1}{y}\,dy = \int\frac{dx}{x}; \qquad \int dy - \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x};$$

откуда $y - \ln|y| = \ln|x| + c$ – общий интеграл данного уравнения.

Заметим, что если постоянную интегрирования записать в виде $\ln c$, то общий интеграл данного уравнения может иметь другую форму:

$$y - \ln|y| = \ln|x| + \ln|c|;$$
$$y = \ln\left| y + \ln|x| \right| + \ln|c|$$

Индивидуальные задания

1. $y' \cdot \sin^2 x = y \cdot \ln y$	**13.** $x \cdot y' - y - x^2 = 0 \quad y(-2) = 1$
2. $(x^2+4) \cdot y' - 2x \cdot y = 0$	**14.** $x^3 \cdot \sin y \cdot y' = 2$
3. $y' - \dfrac{xy}{x^2-1} = 0$	**15.** $\dfrac{dy}{dx} - y = 3 \quad y(0) = -2$
4. $y' \cdot tg\, x - y = 0$	**16.** $y' \cdot \sin x - y \cdot \ln y = 0 \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$
5. $y' \cdot \sqrt{1-x^2} = x, \quad y(0) = 1$	**17.** $y - xy' = a \cdot (1 + x^2 \cdot y')$
6. $(x^2+4) \cdot dy - 2xy \cdot dx = 0, \; y(1) = 5$	**18.** $(1+e^x) \cdot y \cdot y' = e^x \quad y(0) = 1$
7. $(1+y^2) \cdot dx - x \cdot y \cdot dy = 0 \quad y(1) = 0$	**19.** $x\,dy = 2\sqrt{y} \cdot \ln x\, dx \quad y(e) = 1$
8. $y' \cdot x \cdot \ln x - y = 0 \quad y(e) = 1$	**20.** $x \cdot \ln x \cdot dy - y\, dx = 0$
9. $dy - y^2 \cdot dx = 0 \quad y(-1) = 1$	**21.** $\sin y \cdot \cos x \cdot dy - \cos y \cdot \sin x \cdot dx = 0$
10. $2xy\,dx = (x^2+4)dy \quad y(1) = 5$	$y(0) = \dfrac{\pi}{4}$
11. $x\,dx = \sqrt{1-x^2} \cdot dy \quad y(0) = 1$	
12. $tg\, x \cdot dy - dx = y \cdot dx \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$	

Задача 2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Легко можно убедиться в том, что дифференциальные уравнения

$$y' = \frac{y-x}{y+x}; \qquad y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}; \qquad y\,dx = (x+y)\,dy$$

не являются уравнениями с разделяющимися переменными. Они являются **однородными уравнениями.**

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **однородным дифференциальным уравнением первого порядка,** если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения.

Определение. Функция $f(x, y)$ называется **однородной функцией нулевого измерения,** если при любом t справедливо тождество $f(t \cdot x;\; t \cdot y) = f(x, y)$.

Так, функции $f_1(x, y) = \dfrac{y-x}{y+x}$; $\qquad f_2(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ – однородные функции нулевого измерения, т. к.

$$f_1(t\cdot x,\ t\cdot y)=\frac{ty-tx}{ty+tx}=\frac{t(y-x)}{t(y+x)}=\frac{y-x}{y+x}=f_1(x,\ y);$$

$$f_2(tx;\ yt)=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)\cdot(ty)}=\frac{t^2x^2+t^2y^2}{2tx\cdot ty}=\frac{t^2\left(x^2+y^2\right)}{t^2(2xy)}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=f_2(x,y).$$

Для сведения однородного к уравнению с разделяющимися переменными сделаем подстановку y/x=t, т. е. $y=x\cdot t$,
где $u=u(x)-$ неизвестная функция.
Тогда $y'=t+x\cdot t'$.

П**ример 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Решение Разделим числитель и знаменатель на x^2. Получим уравнение

$$y'=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}. \quad y'=\frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x^2}}.$$

Подстановкой $\dfrac{y}{x}=t$; или $y=tx$ откуда $y'=t+xt'$.
Подставив y и y' в данное уравнение, получим

$$t+xt'=\frac{1+t^2}{2t} \quad \text{или} \quad xt'=\frac{1+t^2}{2t}-t.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно вспомогательной функции $t(x)$. Упростим правую часть:

$$x\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1-t^2}{2t}.$$

Умножив на $\dfrac{dx\cdot 2t}{t\cdot\left(1-t^2\right)}$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{2t\ du}{1-t^2}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим $-\ln\left|1-t^2\right| = \ln|x|-\ln|c|$;
или

$$\ln\left|1-t^2\right|=\ln|c|-\ln|x|,$$

или

$$\ln\left|1-t^2\right|=\ln\left|\frac{c}{x}\right|;$$

Потенцируем $1-t^2=\dfrac{c}{x}$; $\qquad t^2=1-\dfrac{c}{x}=\dfrac{x-c}{x}.$

Подставив $t=y/x$, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{x-c}{x}; \qquad \frac{y^2}{x}=x-c; \qquad y^2=x^2-xc; \qquad x^2-y^2=xc.$$

Проверка: $\begin{cases} 2x-2y\cdot y'=c \\ x^2-y^2=cx \end{cases}$

$x^2-y^2=2x^2-2xy\cdot y'$ или $2xyy'=x^2+y^2$; $\quad y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ – искомое уравнение.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $x\cdot dy-\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)\,dx=0$ при начальных условиях $y(1)=\pi$.

Решение

Разделив на x обе части уравнения, получим данное уравнение. Решаем уравнение подстановкой $\dfrac{x}{x}\cdot dy-\left(\dfrac{y}{x}+\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{y^2}{x^2}}\right)\,dx=0$

$$\frac{y}{x}=t; \qquad y=t\cdot x,\ \ y'=t'x+t$$

Разделим уравнение на dx получим:

$$\frac{dy}{dx}-\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}\right)=0 \text{ или } y'-\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}\right)=0$$

Поставим y' $и$ t в уравнение, получим

$$t'x+t-\left(t-\sqrt{1-t^2}\right)=0.$$

Или после раскрытия скобок.

$-t'x+\sqrt{1-t^2}=0.$ $t'x=-\sqrt{1-t^2}$, $\dfrac{dt}{dx}x=-\sqrt{1-t^2}$ это уравнение с разделяющимися переменными. Умножив обе части на dx и разделив обе части на $x\cdot\sqrt{1-t^2}$, получим $\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{dx}{x}$ – уравнение с разделенными переменными. Интегрируя левую и правую части уравнения, получим

$$arc\sin\ t=\ln|x|+\ln|c|.$$

Подставив $t=\dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения:

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|xc|.$$

Найдем частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям $y=\pi$ при $x=1$.

Подставим в формулу общего интеграла $y=\pi$, $x=1$:

$\arcsin\dfrac{\pi}{1}=\ln 1\cdot c$; $\quad 0=\ln c$, отсюда $c=1$ и частный интеграл

$$arc\sin\frac{y}{x}=\ln|x|.$$

Индивидуальные задания

1. $2x\cdot y\cdot y'+x^2-y^2=0$	13. $x\cdot y'-y=x\cdot tg\frac{y}{x}\quad y(1)=\frac{\pi}{2}$
2. $x\cdot y'=y+\sqrt{y^2-x^2}$	14. $2x\cdot y\cdot y'+x^2-y^2=0$
3. $(y^2-x^2)\cdot dx-x\,y\,dy=0;$	15. $x\cdot y'+x+y=0$
4. $x\cdot y'-y=x\cdot\cos^2\frac{y}{x}$	16. $(x+y)\cdot y'+(x-y)=0$
5. $2x^2\cdot y'=x^2+y^2$	17. $x\cdot y'-y=\sqrt{y^2+x^2}$
6. $x\cdot y'\cdot\cos\frac{y}{x}=y\cdot\cos\frac{y}{x}-x$	18. $x\cdot y'=y\ln\frac{y}{x}$
7. $(x^2-2y^2)\cdot dx+2\,x\,y\,dy=0$	19. $y'=e^{-\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}=0$
8. $x\cdot y\cdot y'+x^2=y^2$	20. $x^2y'+y^2=yxy'$
9. $x^2+y^2=2xy\cdot y'\quad y(1)=2$	21. $y'=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$
10. $(x^2-2y^2)+2\,x\,y\,y'=0$	22. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$
11. $(x+y)\cdot dy+(x-y)dx=0$	
12. $x\cdot y\cdot y'=y^2+9x^2y$	

Задача 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется *линейным*, если имеет следующий вид:

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x), \qquad (1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$– заданные функции от x. Приведем теорему Коши для линейных уравнений первого порядка.

Теорема Коши. Пусть $(a;b)$ интервал, в котором функция $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывна. Тогда для любых $x_0 \in (a;b)$ и $y_0 \in (-\infty;+\infty)$ задача Коши с начальными значениями $(x_0;y_0)$ имеет единственное решение, т.е. существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Нахождение общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка (1) сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделенными переменными с помощью подстановки

$$y = u \cdot v, \tag{2}$$

где u и v – неизвестные функции от x. Из (2) находим

$$y' = u'_x v + u v'_x \text{ или}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}. \tag{3}$$

Подставив значения y и y' в уравнение (2), получаем

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x), \text{ или}$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u\right) = Q(x). \tag{4}$$

Так как искомая функция y подстановкой (2) представлена в виде произведения двух функций u и v, то одну из них, например u, мы можем выбрать по нашему усмотрению, кроме $u = 0$. Выберем функцию так, чтобы

$$\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u = 0, \tag{5}$$

т.е. в качестве функции возьмем одно из частных решений u^* уравнения (5). Решая уравнение (2.20) как уравнение с разделяющимися переменными, найдем отличную от нуля функцию $u^* = e^{-\int P(x)dx}$.

Так как функция u^* является решением уравнения (5), то после ее подстановки в уравнение (4) получим

$$u^* \frac{dv}{dx} = Q(x), \text{ т.е. } dv = \frac{Q(x)}{u^*(x)} dx. \tag{6}$$

Решив уравнение (6) как уравнение с разделенными переменными, в котором u^* известна, найдем функцию $v = v(x, C)$, содержащую произвольную постоянную C и являющуюся общим решение уравнения (6).

Заменив в равенстве $y = u \cdot v$ функции u и v найденными значениями, получим решение $y = u^*(x) \cdot v(x, C)$ уравнения (1), содержащее вместе с функцией v и произвольную постоянную C.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$(1 + x^2)y' - xy = 2x.$$

Решение. Разделив все члены данного уравнения на $(1 + x^2) \neq 0$, приведем его к виду (2.16)

$$y' - \frac{xy}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2} \quad . \tag{7}$$

Здесь $P(x) = -\dfrac{x}{1 + x^2}$, $Q(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Положим $y = u \cdot v$, откуда $y' = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$.

Подставим эти значения y и y' в уравнение (7):

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{xuv}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например v, и вынесем v за скобку

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{x \cdot u}{1 + x^2}\right) = \frac{2x}{1 + x^2}. \tag{8}$$

Выберем функцию $u \neq 0$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е.

$$\frac{du}{dx} - \frac{xu}{1 + x^2} = 0. \tag{9}$$

Тогда уравнение (8) примет вид

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{1 + x^2}. \tag{10}$$

Решаем уравнение (10) как уравнение с разделяющимися переменными (при $u \neq 0$):

$$\frac{du}{dx}-\frac{xu}{1+x^2}=0, \text{ т.е. } \frac{du}{u}=\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Интегрируем почленно это уравнение :

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{x\,dx}{1+x^2} \text{ ,или } \int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}.$$

т.к. $d\left(1+x^2\right)=\left(1+x^2\right)'dx=2x\,dx$, откуда $x\,dx=\frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)$

т.е. $\ln|u|=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|$, откуда

$$u=\sqrt{1+x^2}. \qquad (11)$$

Подставив значение функции u в уравнение (10), найдем

$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dv}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}, \text{ т.е. } dv=\frac{2x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интегрируя почленно

$$\int dv=\int\frac{2x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \text{ или } \int dv=\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(1+x^2\right),$$

т.к. $d\left(1+x^2\right)=2x\,dx$.

Откуда $v=\dfrac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C$, или $v=\dfrac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C$ или

$$v=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+C. \qquad (12)$$

Заменив в подстановке $y=u\cdot v$ функции u и v их выражениями из равенств (11) и (12), получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y=\sqrt{1+x^2}\left(C-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\right), \text{ или } y=C\sqrt{1+x^2}-2.$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$xy'-y=x^3, \text{ если } y=1/2 \text{ при } x=1.$$

Решение. Разделив все члены данного уравнения на $x \neq 0$, приведем его к виду (13)

$$y' - y\frac{1}{x} = x^2. \tag{13}$$

Здесь $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$.

Положим $y = u \cdot v$, откуда $y' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

Подставим эти значения в уравнение (13):

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - u \cdot v \cdot \frac{1}{x} = x^2.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например v, и вынесем v за скобку

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) = x^2. \tag{14}$$

Выберем функцию u так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е. чтобы

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0. \tag{15}$$

Тогда уравнение (13) примет вид

$$u\frac{dv}{dx} = x^2. \tag{16}$$

Решаем уравнение (14) как уравнение с разделяющимися переменными (при $u \neq 0$):

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \ \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя почленно уравнение

$$\int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x}, \text{ или } \ln u = \ln x, \text{или } u = x. \tag{17}$$

Подставим это значение в уравнение (16), найдем

$x\frac{dv}{dx} = x^2$, т.е. $dv = x\,dx$.

Интегрируя почленно $\int dv = \int x\,dx$ или

$$v=\frac{x^2}{2}+C\,. \tag{18}$$

Заменив в подстановке $y=u\cdot v$ функциями u и v их выражениями из равенств (17) и (18), получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right),\text{ или } y=\frac{x^3}{2}+Cx\,. \tag{19}$$

Пример 3. $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$.

Решение Решаем подстановкой

$$y=u\cdot v;\quad y'=u'v+u\cdot v'.$$

$$u'v+uv'+\frac{1}{x}u\cdot v=\frac{\sin x}{x}.$$

$$v\cdot\left(u'+\frac{1}{x}u\right)+u\cdot v'=\frac{\sin x}{x}. \tag{20}$$

$u'+\frac{1}{x}u=0$	$u\cdot v'=\frac{\sin x}{x}$
$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}\cdot u$	$\frac{1}{x}\cdot v'=\frac{\sin x}{x}$
$\frac{du}{u}=-\frac{dx}{x}$	$v'=\sin x$
$\ln u=-\ln x.$	$v=-\cos x+c$

$u=\frac{1}{x}$ подставим в (20).

Общее решение: $y=\frac{1}{x}\cdot(-\cos x+c)$.

Пример 4. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}\cdot y=(x+1)^3 \quad \text{при} \quad y(0)=3.$$

Решение Подстановка: $y=u\cdot v$.

$$\frac{dy}{dx}=y'=u'v+uv';$$

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{2}{x+1}\cdot uv=(x+1)^3$$

$$v\cdot\left(u'-\frac{2}{x+1}\cdot u\right)+u\cdot v'=(x+1)^3 \tag{21}$$

$$u'-\frac{2}{x+1}\cdot u=0,\qquad \frac{du}{u}=\frac{2dx}{x+1},\qquad \int\frac{du}{u}=\int\frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln|u|=2\ln|x+1|,\qquad u=(x+1)^2.$$

Подставим найденную функцию u в уравнение (21): $u \cdot v' = (x+1)^3$;

$$(x+1)^2 \cdot v' = (x+1)^3.$$

$$v' = x+1; \qquad \frac{dv}{dx} = x+1, \qquad dv = (x+1)\,dx,$$

$$v = \int (x+1)\,dx = \frac{(x+1)^2}{2} + c.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения будет иметь вид

$$y = (x+1)^2 \cdot \left(\frac{(x+1)^2}{2} + c \right)$$

или $\qquad y = \dfrac{(x+1)^4}{2} + c \cdot (x+1)^2.$

Найдем частное решение дифференциального решения, удовлетворяющее начальному условию $y = 3$ при $x = 0$.

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + c \cdot (0+1)^2; \qquad c = 5/2.$$

Следовательно, искомое частное решение такое:

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2} \cdot (x+1)^2.$$

Индивидуальные задания

1. $y' + 2xy = e^{-x^2}$

2. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$

3. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$

4. $x y' - \dfrac{y}{x+1} = x$

5. $y' \cdot x \cdot \ln x - y = 3x^3 \cdot \ln^2 x$

6. $(1+x^2) \cdot y' - 2xy = (1+x^2)^2$

7. $x \cdot y' - y - x^2 = 0$

8. $y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x = 1 \quad y(0) = 0$

9. $(1+x^2)y' - xy = 2x$ если $y = 0$ при $x = 0$.

10. $y' - \dfrac{3}{x} y = x$, если $y = 1$ при $x = 1$.

11. $y' - 4y = e^{2x}$

12. $y' - \frac{y}{x} = 2, \quad y(1) = -1$

13. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}, \quad y(0) = 4$

14. $y' + 2x\,y = x\,e^{-x^2}, \; y(0) = 2$

15. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

16. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 2$

17. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 3$

18. $y' - \frac{2}{x+1}\,y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 2$

19. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 5$

20. $y' + \frac{2x}{1+x^2}\,y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \; y(0) = 2$

21. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

22. $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$