Задача 4. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим некоторые типы д.у. II, решение которых сводится к решению дифференциальных уравнений первого порядка.

1-й тип. Простейший тип таких уравнений – это $y'' = f(x)$. Дифференциальное уравнение содержит только вторую производную и некоторую функцию от x (ни сама функция y, ни ее первая производная y' в уравнение не входят). Уравнение вида $y'' = f(x)$ решается последовательным интегрированием два раза.

Пример 1. $y'' = \cos 4x.$

$$y' = \int \cos\ 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x + c_1;$$

Получили уравнение первого порядка

$$y' = \frac{1}{4}\sin\ 4x + c_1;$$

отсюда

$$y = \int\left(\frac{1}{4}\sin\ 4x + c_1\right)dx = -\frac{1}{16}\cos 4x + c_1 x + c_2 \text{ –}$$

общее решение исходного уравнения (содержит две произвольные постоянные c_1 и c_2).

Аналогично решаются и дифференциальные уравнения порядков выше второго, если они имеют такой же вид, например: $y''' = f(x)$; $f^{iv} = f(x)$.

Пример 2. $y''' = 3e^{-2x}$.

$$y'' = -\frac{3}{2}e^{-2x} + c_1,$$

$$y' = \frac{3}{4}e^{-2x} + c_1 x + c_2,$$

$$y = -\frac{3}{8}e^{-2x} + c_1\cdot\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_2 \text{ –}$$

общее решение данного уравнения.

Пример 3. $y^{iv} = \dfrac{x^2}{2} + 3x.$

$$y''' = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + c_1.$$

$$y'' = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{2} + c_1 x + c_2.$$

$$y' = \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{8} + c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

$$y = \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{40} + c_1 \cdot \frac{x^3}{6} + c_2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 -$$

общее решение уравнения. Обратите внимание, общее решение дифференциального уравнения третьего порядка содержит три произвольные постоянные $(c_1,\ c_2,\ c_3)$, а дифференциального уравнения четвертого порядка – уже четыре $(c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$. Допускают понижение порядка и дифференциальные уравнения вида $F(x,\ y',\ y'') = 0.$

2-й тип. $F(x,\ y',\ y'') = 0$, т. е. уравнения, в которые явно не входит сама искомая функция y. Решаются такие уравнения подстановкой $y' = p$, где $p = p(x)$ – вспомогательная функция. Тогда $y'' = p'\left(\dfrac{dp}{dx}\right)$. Подставив $y' = p$ *и* $y'' = p'$ в данное уравнение, получим уравнение $F(x,\ p,\ p') = 0$ – дифференциальное уравнение первого порядка.

Пример 4. Решить уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} = x. \qquad (9)$$

Положим $y' = p;\quad y'' = p'$ и уравнение примет вид

$$p' + \frac{p}{x} = x \ - \qquad (10)$$

это линейное уравнение первого порядка относительно функции $p = p(x)$.

Решаем его подстановкой $p = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$; $p' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Получим $\quad u' \cdot v + u \cdot v' + \dfrac{u \cdot v}{x} = x;$

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + u \cdot v' = x;$$

$$u' + \frac{u}{x} = 0; \qquad \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0; \qquad \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} = 0;$$

$$\ln u + \ln x = 0; \qquad u = \frac{1}{x;}$$

$$u \cdot v' = x; \qquad \frac{1}{x} \cdot v' = x; \qquad v' = x^2; \qquad \frac{dv}{dx} = x^2;$$

$$dv = x^2 dx;$$

$$v = \frac{x^3}{3} + c_1.$$

Функция

$$p = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right).$$

Исходное уравнение (9) решалось подстановкой $y' = p$. Поэтому

$$y' = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}.$$

Интегрируя, получим $y = \frac{x^3}{9} + c_1 \ln x + c_2$ –

общее решение уравнения (9).

Пример 5. Найти частное решение уравнения $y'' \cdot (x^2 + 1) = 2xy'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$. Применим подстановку $y' = p$; $y'' = p'$. Получим уравнение

$$p' \cdot (x^2 + 1) = 2x \cdot p.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно функции p. Разделим переменные:

$$\frac{dp}{dx} \cdot (x^2 + 1) = 2x \cdot p; \qquad dp \cdot (x^2 + 1) = 2x \cdot p\,dx; \qquad \frac{dp}{p} = \frac{2x\,dx}{x^2 + 1}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x\,dx}{x^2+1}; \qquad \ln p = \ln\left(x^2+1\right) + \ln c_1;$$

$p = c_1 \cdot \left(x^2+1\right)$. Откуда $y' = c_1\left(x^2+1\right)$.

Используем второе начальное условие $y'(0) = 3$, получим

$3 = c\ (0+1); \quad c_1 = 3.$

Следовательно, $y' = 3 \cdot \left(x^2+1\right)$,

а после интегрирования $y = x^3 + 3x + c_2$.

Применим первое начальное условие $\mathrm{y}(0) = 1$, получим

$$1 = 0 + 0 + c_2, \qquad c_2 = 1.$$

Искомым частным решением будет

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

Еще одним типом уравнений, допускающих понижение порядка, является уравнение вида $F(y,\ y',\ y'') = 0$.

3-й тип $F(y,\ y',\ y'') = 0$,

т. е. уравнение, не содержащее явно независимую переменную x. Здесь порядок уравнения понижается на единицу путем следующей замены:

$y' = p$, где $p = p\ (y)$.

Здесь p – новая вспомогательная функция, а y играет роль независимой переменной. Тогда $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, т. е. $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$.

Заметим, что вторая производная y'' получена по правилу дифференцирования сложной функции.

Подставив выражения $\mathrm{y}' = \mathrm{p},\ \mathrm{y}'' = \mathrm{p} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dy}}$ в данное уравнение, получим

$$F(y,\ p,\ p') = 0 -$$

уравнение первого порядка относительно p как функции от y.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$2y \cdot y'' + y'^2 = 0. \tag{11}$$

Полагаем $y' = p,\ y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy},$ получим $2y \cdot p \cdot \dfrac{dp}{dy} + p^2 = 0$ – (12)

это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Приведя его к виду $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dy}{2y}$ и интегрируя, получим $\ln p = -\dfrac{1}{2}\ln y + \ln c_1;$

$$\ln p = \ln \frac{c_1}{\sqrt{y}}, \qquad p = \frac{c_1}{\sqrt{y}}.$$

Так как исходное уравнение (11) решалось с помощью подстановки $p = y'$, получим $y' = \dfrac{c_1}{\sqrt{y}}$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно искомой функции y от x.

$\sqrt{y} \cdot dy = c_1 \cdot dx.$

$\int \sqrt{y}\, dy = \int c_1\, dx;\qquad \dfrac{2y^{3/2}}{3} = c_1 x + c_2;\qquad y^{3/2} = \dfrac{3}{2}c_1 \cdot x + \dfrac{3}{2}c_2.$

Но так как c_1 *и* c_2 – произвольные постоянные, $\left(\dfrac{3}{2}\cdot c_1\right)$ *и* $\left(\dfrac{3}{2}\cdot c_2\right)$ – также произвольные постоянные. Поэтому полученный общий интеграл данного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$y^{3/2} = c_1 \cdot x + c_2, \text{т.е. } \sqrt{y^3} = c_1 x + c_2, \text{ или } y = \sqrt[3]{(c_1 x + c_2)^2}.$$

Пример 7. Найти частное решение уравнения $y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2;\ y'(0) = 2.$ Применим подстановку $y' = p;$ Тогда

$y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy}.$ Получим уравнение первого порядка:

$p \cdot \dfrac{dp}{dy} - p^2 + p \cdot (y-1) = 0.$

Разделив уравнение на $p \neq 0,$ получим

$$\frac{dp}{dy} - p = 1 - y.$$

Это линейное уравнение первого порядка относительно функции p *от* y.

Решаем его подстановкой $p = u \cdot v$, *где* $u = u(y)$; $v = v(y)$.

$p' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v = 1 - y$; $v \cdot (u' - u) + u \cdot v' = 1 - y$; $u' - u = 0$.

$\frac{du}{dy} = u$; $\frac{du}{u} = dy$; $\int \frac{du}{u} = \int \mathrm{dy}$.

$\ln u = y$; $u = e^{y}$.

$u \cdot v' = 1 - y$; $e^{y} \cdot v' = 1 - y$;

$v' = \frac{1-y}{e^{y}} = (1-y) \cdot e^{-y}$; $\frac{dv}{dy} = (1-y) \cdot e^{-y}$;

$dv = (1-y) \cdot e^{-y} dy$;

$\int dv = \int (1-y) \cdot e^{-y} dy$; $v = \int (1-y) \cdot e^{-y} dy$.

Интеграл справа берем по частям с помощью подстановки

$1 - y = t$; $dt = -dy$; $e^{-y} dy = ds$; $s = \int e^{-y} dy = -e^{-y}$.

Тогда $\int (1-y) \cdot e^{-y} dy = -(1-y) \cdot e^{-y} - \int e^{-y} dy = -(1-y) \cdot e^{-y} + e^{-y} + c_1$.

Таким образом, $v = e^{-y} - (1-y) \cdot e^{-y} + c_1$.

Тогда функция $p = e^{y} \cdot \left(e^{-y} - (1-y) \cdot e^{-y} + c_1\right) = 1 - (1-y) + c_1 \cdot e^{y} = y + c_1 \cdot e^{y}$.

Таким образом, $p = y + c_1 \cdot e^{y}$, или $y' = y + c_1 \cdot e^{y}$.

Найдем значение c_1 из начальных условий $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

$2 = 2 + c_1 \cdot e^{2}$; $c_1 \cdot e^{2} = 0$; $c_1 = 0$.

Таким образом $y' = y$; $\frac{dy}{dx} = y$; $dy = y \cdot dx$; $\frac{dy}{y} = dx$.

$\int \frac{dy}{y} = \int \mathrm{dx}$; $\ln y = x + c_2$, $y = e^{x + c_2} = e^{x} \cdot e^{c_2} = c \cdot e^{x}$.

Заметим, что константа e^{c_2} может быть обозначена как c, т. к. c_2 – произвольная константа , e^{c_2} – тоже произвольная постоянная. Таким образом, $\mathrm{y} = c \cdot \mathrm{e}^{x}$.

Найдем c из первого начального условия $y(0)=2$:

$2=c\cdot e^{0}$; $c=2.$

Задачи для индивидуальных заданий

Тип 1

1. $y''\cdot\cos^{2}\dfrac{x-1}{2}=1$ 2. $y''\cdot\sin^{2}\dfrac{x}{2}=2$ 3. $y''=\dfrac{3}{\cos^{2}2x}$ 4. $y''=\dfrac{1}{2}\cdot\left(3x-\cos\dfrac{2}{3}x\right)$ 5. $y''=x^{2}-\cos 2x$ 6. $(1+2x)^{3}\cdot y''=3$ 7. $y''\cdot e^{-x}+3=0$ 8. $y''=\dfrac{1}{5}\cdot(x-2\sin 3x)$ 9. $y''=\sin\dfrac{x}{2}-x$ 10. $y''-2e^{-2x}=0$	11. $y'''=\dfrac{1}{x}$ 12. $y'''=x^{2}-\cos 2x$ 13. $y''=x^{2}-e^{2x}$ 14. $y'''=x+12x^{2}-30x^{4}$ 15 $y''=12x^{2}-3^{2x}$ 16. $y'''=e^{2x}+12x^{2}-30x^{4}$ 17. $y'''=40x^{2}-\sin 3x$ 18. $(1+3x)^{3}\cdot y''=9$ 19. $y''=\dfrac{4}{9}\cdot\left(6x-\cos\dfrac{2}{3}x\right)$ 20. $y'''=\sin\dfrac{x}{3}-x$ 21. $y''\cdot e^{-2x}+4=0$ 22. $y''=\dfrac{4}{\sin^{2}2x}$

Тип 2

1. $1+\dfrac{y'}{x}=y''$ 2. $y''+1=-\dfrac{y'}{x}$ 3. $x\cdot(y''+1)+y'=0$ 4. $(3+x)\cdot y''+y'=0$ 5. $x\cdot y''-y'\cdot\ln\dfrac{y'}{x}=0$	6. $x\cdot y''-y'-x^{2}=0$ 7. $y'-x\cdot\ln x\cdot y''=0$ 8. $(1+2x^{2})\cdot y'-xy''=0$ 9. $x\cdot y''+y'=0$ 10. $y'=-x\,y''$ 11. $x\cdot y''-y'-x^{2}=0$

Тип 3

1. $y''=128y^{3}, y(0)=\sqrt{2}, y'(0)=1/(2\sqrt{2}).$

2. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3. $y'' 32\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi / 2, y'(1) = 4$.

4. $y'' = 98y^3, y(1) = 1, y' = 7$.

5. $y'' y^3 + 49 = 0, y(3) = -7, y'(3) = -1$.

6. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1, y(0) = \sqrt{2} / 2, y'(0) = 1 / \sqrt{2}$.

7. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$.

8. $y'' y^3 + 36 = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2$

9. $y'' = 18\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi / 2, y'(1) = 3$.

10. $4y^3 y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = 1 / \sqrt{2}$.