КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Комплексными числами называются числа вида $z = x + i\,y$, где $i^2 = -1$, x, y – действительные числа, $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа.

По определению, два комплексных числа: $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ – равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число $\overline{z}$ называется сопряженным комплексному числу z, если $\operatorname{Re}\overline{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im}\overline{z} = -\operatorname{Im} z$. Другими словами, если $z = x + i\,y$, то $\overline{z} = x - i\,y$.

Всякому комплексному числу $x + i\,y$ можно поставить в соответствие единственную точку плоскости $M(x,\ y)$ и обратно, всякую точку $M(x,\ y)$ плоскости XOY можно рассматривать как геометрический образ единственного комплексного числа $x + i\,y$.

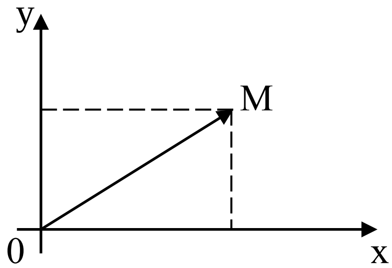

Рисунок 1

Для сокращения вместо “точка, соответствующая комплексному числу $x + i\,y$”, говорят просто “точка $x + i\,y$”. При этом множество всех действительных чисел изображается точками оси абсцисс, которая поэтому называется действительной осью, множество чисто мнимых чисел $i\,y$ точками оси ординат, называемой мнимой осью. Заметим, что одна точка мнимой оси, а именно начало координат, изображает действительное число нуль. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением числа $x + i\,y$ радиус-вектор точки $M(x,\,y)$ – $\overrightarrow{OM}\ \{x,\,y\}$.

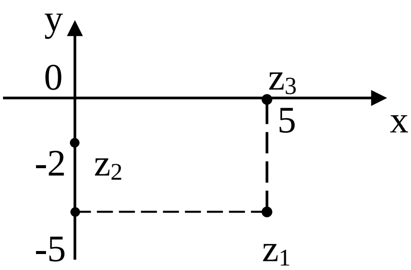

Рисунок 2

Пример 1. Построить точки $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 5$.

В дальнейшем, наряду с представлением комплексных чисел в декартовых координатах, полезно иметь их представление в обобщенных полярных координатах.

Рассмотрим число $x + i\,y$, которому на плоскости соответствует точка $M(x,\,y)$.

Ее координаты в полярной системе координат (ρ, φ).

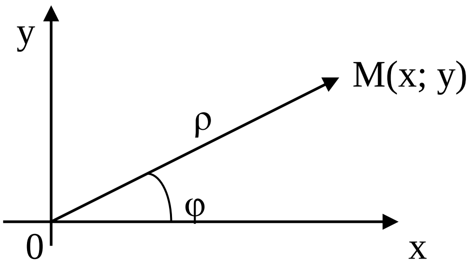

Рисунок 3

Тогда $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$.

$$z = x + i\,y = \rho\cos\varphi + i\,\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Полярный радиус $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ называется *модулем* комплексного числа и обозначается $|z| = \rho$.

Полярный угол φ называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Тогда

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z).$$

Эта форма называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Модуль комплексного числа определяется однозначно: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π. Главным значением аргумента называется значение, заключенное в интервале $(-\pi, \pi]$. Обозначается оно $\arg z$. Таким образом, $-\pi < \arg z \le \pi$.

Очевидно, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Главное значение аргумента определяется однозначно.

Так как $\operatorname{tg} \arg z = \dfrac{y}{x}$,

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } (x, y) \in \text{I, IV четвертям}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } (x, y) \in \text{II четверти}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если } (x, y) \in \text{III четверти}. \end{cases}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа будет иметь вид

$$z = |z|\big(\cos(\arg z + 2k\pi) + i\sin(\arg z + 2k\pi)\big).$$

Задача 1. Написать в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 + i$.

Решение. $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$, т.к.

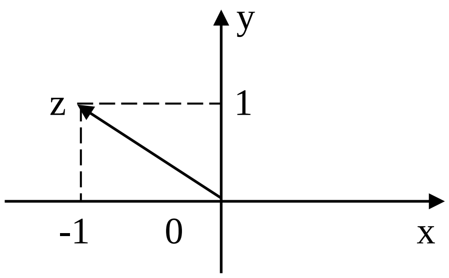

Рисунок 4

$$\arg z = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi.$$

$$z = \sqrt{2}\ \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\ \pi\right) + i\ \sin\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\ \pi\right)\right).$$

Пусть $z = x + i\ y = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$. Используя формулу Эйлера $\cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi}$, получаем так называемую *показательную форму* записи комплексного числа:

$$z = |z|\, e^{i \operatorname{Arg} z}.$$

Задача 2. Представить в показательной форме комплексное число $z = -1 - i$.

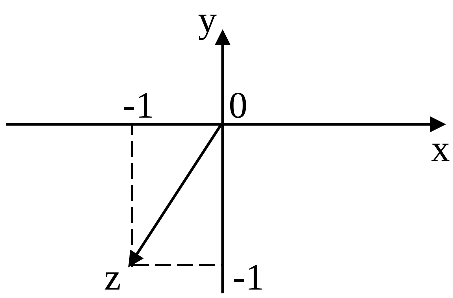

Рисунок 5

Решение

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = 1,$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi,$$

$$-1 - i = \sqrt{2}\ e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}.$$

Пример 2. Вычислить $e^{\pi i}$.

Решение. По формуле Эйлера $e^{\pi i} = \cos\pi + i \sin\pi = -1.$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМ

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов с учетом $i \cdot i = -1$. При записи результата следует отделить действительную часть от мнимой, т. е. собрать отдельно члены, содержащие множитель i, и члены, не содержащие множитель i:

$$(x_1 + i\ y_1) + (x_2 + i\ y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + i\ y_1)\cdot(x_2 + i\ y_2) = (x_1\ x_2 - y_1\ y_2) + i(x_1\ y_2 + y_1\ x_2),$$

$$(x_1 + i\ y_1) - (x_2 + i\ y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

В частности, $z\cdot\bar{z}=|z|^2$. Операции сложения и вычитания сводятся к сложению и вычитанию векторов, изображающих эти числа. Отсюда расстояние между точками $\rho(z_1, z_2)=|z_1-z_2|$.

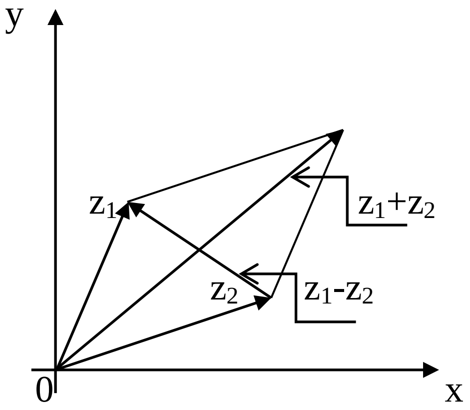

Рисунок 4

Пример 2. $|z-z_0|=R$ – уравнение окружности с центром в точке z_0 и радиусом равным R.

Деление на комплексное число, отличное от нуля, определяется как действие, обратное умножению. Для представления частного в виде

$$\mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z$$

следует провести простые преобразования, показанные на следующем пример

Задача 3.

$$\frac{3-i}{1+2i}=\frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-6i-i-2}{1+4}=\frac{1-7i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$$

.

Можно доказать методом полной математической индукции, что для любого целого $n>0: z^n=|z|^n(\cos n\,\mathrm{Arg}\, z+i\sin n\,\mathrm{Arg}\, z)$ (формула Муавра). Формула справедлива и для целых отрицательных n.

Пример 3. Вычислить $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$.

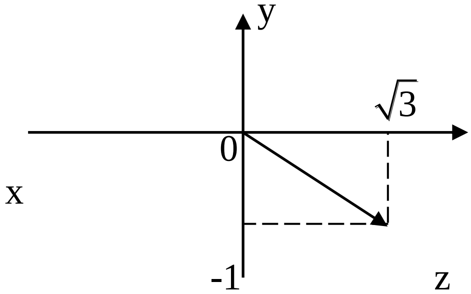

Рисунок 5

Решение

$$\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{3+1}=2,$$

$$\arg\left(\sqrt{3}-i\right)=\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6},$$

По формуле Муавра при n=5 имеем

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right),$$

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^5=2^5\left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi+10k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi+10k\pi\right)\right)=$$

$$=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-16\sqrt{3}-16i.$$

Для модуля и аргумента произведения и частного справедливы следующие утверждения:

Корнем n-й степени из комплексного числа называется такое число w, для которого $w^n = z$.

Используя формулу Муавра, получим

$$|w|=\sqrt[n]{|z|},\quad \operatorname{Arg} w=\frac{\operatorname{Arg} z}{n}=\frac{\arg z+2k\pi}{n},\quad k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число кратное 2π, и, следовательно, получатся значения корня, совпадающие с рассмотренными. Итак, корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Задача 4. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$ и построить их.

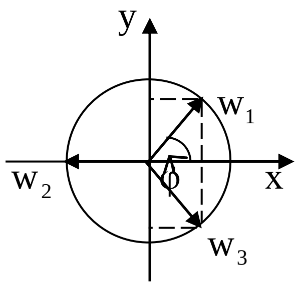

Рисунок 6

Решение. $|-8|=8,\quad \arg(-8)=\pi,$

$$-8=8\left(\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)\right),$$

$$\sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),$$

$$k=0,\quad w_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3},$$

$$k=1,\quad w_2=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=2(-1+i\cdot 0)=-2,$$

$$k=2,\quad w_3=2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

Типовой расчет «Комплексные числа»
Задача 1

Представить комплексное число в тригонометрической форме:

1. $1+i$;
2. $1-i$;
3. $-1+i$;
4. $-1-i$;
5. $-2i$;
6. $3-3i$;
7. $-\sqrt{3}+i$;
8. $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$;
9. $\sqrt{3}+i$;
10. $0{,}5+0{,}5\sqrt{3}i$;
11. $-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$;
12. $3\sqrt{3}-3i$;
13. $0{,}5-0{,}5i$;
14. $4i$;
15. $-0{,}7+0{,}7i$;
16. $1-\sqrt{3}i$;
17. $-2+2i$;
18. $3i$;
19. $-1{,}2$;
20. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$;
21. $-\sqrt{2}-\sqrt{6}i$;
22. $\sqrt{3}-i$;
23. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i$;
24. $-5i$;
25. $3-3\sqrt{3}i$;
26. $1+\sqrt{3}i$;
27. $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$;
28. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$;
29. $-8i$;
30. $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

Задача 2

Представить число в показательной форме:

1. $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $1-\sqrt{3}i$;
3. $3+3\sqrt{3}i$;
4. $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$;
5. $-10-10i$;
6. $2+2i$;
7. $3-3\sqrt{3}i$;
8. $2-2i$;
9. $\frac{7}{2}+\frac{7}{2\sqrt{3}}i$;
10. $-5+5i$;
11. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;
12. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$;

13. $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$;

14. $4\mathrm{i}$;

15. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\mathrm{i}$;

16. $-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,\mathrm{i}$;

17. $1-\mathrm{i}$;

18. $2\mathrm{i}$;

19. $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$;

20. -2;

21. i;

22. $1+\mathrm{i}$;

23. $-1+\mathrm{i}$;

24. $-1-\mathrm{i}$;

25. ;

26. ;

27. ;

28. $-3\mathrm{i}$;

29. $2+2\mathrm{i}$;

30. $2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

Задача 3

Выполнить указанные действия:

1. $(\mathrm{i})^{43}+\frac{2}{2+3\mathrm{i}}$;

2. $(2-4\mathrm{i})^{2}+\frac{4+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$;

3. $(\mathrm{i})^{12}+\frac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$;

4. $\frac{3-4\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}+3+(\mathrm{i})^{17}$;

5. $\frac{2\mathrm{i}+7}{2+\mathrm{i}}+(\mathrm{i})^{7}$;

6. $(\mathrm{i})^{22}+\frac{7+5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$;

7. $\frac{7-5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}+\mathrm{i}(1-\mathrm{i})$;

8. $\frac{7-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}+(\mathrm{i})^{11}$;

9. $\frac{5}{1+2\mathrm{i}}+(\mathrm{i})^{18}$;

10. $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+(\mathrm{i})^{4}$;

11. $-\ \frac{12}{5\ \ \mathrm{i}}+\mathrm{i}(2+\mathrm{i})^{2}$;

12. $(\mathrm{i})^{23}-\frac{17-6\mathrm{i}}{3-\ \ 4\mathrm{i}}$;

13. $\frac{4}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}+\frac{\sqrt{3}}{\mathrm{i}}$;

14. $(3\mathrm{i}+2)\cdot(-\mathrm{i})^{9}+\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-1}$;

15. $(1+2i)\cdot(i)^{21}+\dfrac{5-i}{i}$;

16. $(0,2-0,3i)\cdot(0,5+0,6i)+(i)^{26}$;

17. $\left(3+\sqrt{3}\,i\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}\,i\right)+(i)^{33}$;

18. $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$;

19. $(i)^{37}+\dfrac{7+5i}{1-2i}$;

20. $(i)^{25}-\dfrac{3-4i}{4-3i}$;

21. $\dfrac{32}{1+3\sqrt{3}\,i}-\dfrac{3\sqrt{7}}{2i}$;

22. $\dfrac{1-i^2}{(1+i)^2}+3+i$;

23. $(i)^{44}-\dfrac{1-i}{i}$;

24. $\left(-0,5-0,5\sqrt{3}\,i\right)^2+0,5\sqrt{3}\,(i)^{35}$;

25. $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}\,i}{2}\right)^4$;

26. $\left(2-\sqrt{2}\,i\right)^2+\dfrac{1+i}{i}$;

27. $(i)^{17}+\dfrac{2i}{(3-i)}$;

28. $\dfrac{(2-i)}{3+i}\cdot\left(1+i^6\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i\right)^2$;

29. $\dfrac{(i)^{13}\cdot(i-1)}{2+i}+1$;

30. $(i)^{15}+\dfrac{6(i+1)^2}{2-i}$.

Задача 4

Вычислить корень:

1. $\sqrt[3]{-2-2i}$;

2. $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$;

3. $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$;

4. $\sqrt[5]{i-1}$;

5. $\sqrt[3]{-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}$;

6. $\sqrt{7+7i}$;

7. $\sqrt[4]{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}i}$;

8. $\sqrt[3]{3i-\sqrt{3}}$;

9. $\sqrt{-1,2-1,2i}$;

10. $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$;

11. $\sqrt[4]{1-i}$ **;**

Решить уравнение:

12. $z^2+2-2i=0$;

13. $z^4-1+\sqrt{3}i=0$;

14. $z^5+1+i=0$;

15. $z^3-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i=0$;

16. $z^4-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i=0$;

17. $z^4+1+\sqrt{3}i=0$;

18. $z^6-\sqrt{3}-i=0$;

19. $z^2-7+7i=0$;

20. $z^4-1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}i=0$;

21. $z^3+3i-\sqrt{3}=0$;

22. $z^3-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i=0$;

23. $z^4-\sqrt{3}i+1=0$;

24. $z^3+1+\sqrt{3}i=0$;

25. $z^3-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i=0$;

26. $z^3-\sqrt{3}i-3=0$;

27. $z^4-\sqrt{3}+i=0$;

28. $z^3-i=0$;

29. $z^3-8i=0$;

30. $z^3-\dfrac{i}{8}=0.$