Задача 5 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теоретический материал

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

где p и q – постоянные величины.

Теорема Коши для линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами формулируется следующим образом.

Теорема Коши. При любых начальных данных $(x_0; y_0; y_0')$ задача Коши имеет, причем единственное, решение, т.е. при любых начальных данных x_0, y_0, y_0' существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = x_0, y'(x_0) = y_0'$.

Определение. Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1) образуют *фундаментальную систему решений*, если для любого x

$$W(x) = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x) \neq 0.$$

Определение. Выражение $W(x)$ называется определителем Вронского, или вронскианом, решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Известно, что функции $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{x}$, и $y_3 = 5e^{2x}$ являются частными решениями уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Доказать, что решение y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений, а y_1 и y_3 не образуют.

Действительно $y_1' = 2e^{2x}$, $y_2' = e^{x}$, $y_3' = 5 \cdot 2e^{2x}$.

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_2:

$$W_1(x) = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x) = e^{2x} \cdot e^{x} - 2e^{2x} \cdot e^{x} = -e^{3x} \neq 0.$$

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_3:

$$W_2(x) = y_1(x) \cdot y_3'(x) - y_1'(x) \cdot y_3(x) = e^{2x} \cdot 10e^{2x} - 2e^{2x} \cdot 5e^{2x} =$$

$$= 10e^{4x} - 10e^{4x} = 0.$$

Вронскиан $W_1(x) \neq 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *образуют фундаментальную пару решений.*

Вронскиан $W_2(x) = 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_3(x)$ не образуют *фундаментальную пару решений.*

Теорема (о структуре общего решения). *Если два частных решения* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами образуют фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2 –произвольные постоянные.

Выражение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ называется *линейной комбинацией функций* $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Найдем решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения уравнения (1) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Будем искать эти частные решения уравнения (1) в виде $y = e^{kx}$, где k=const; тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 \cdot e^{kx}$.

Подставим выражение для y, y' и y'' в уравнение (1), получим $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$, т.е. $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$.

Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (2)$$

Определение. Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для составления характеристического уравнения (2) достаточно в уравнении (2.12) заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1.

Решив характеристическое уравнение по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, найдем его корни k_1 и k_2, а следовательно, и частные решения уравнения (1):

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}.$$

При решении характеристического уравнения возможны три случая.

Случай 1. *Корни характеристического уравнения действительны и различны* .

В этом случае имеем два частных решения уравнения (1):

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ и } y_2 = e^{k_2 x}.$$

Покажем, что эти решения образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = e^{k_1 x} k_2 e^{k_2 x} -$$

$$- k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} = k_2 e^{(k_1 + k_2)x} - k_1 e^{(k_1 + k_2)x} = e^{(k_1 + k_2)x}\left(k_2 - k_1\right) \neq 0,$$

т.е. $e^{(k_1 + k_2)x} \neq 0$ и $k_2 \neq k_1$.

Следовательно, в этом случае решение общего уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (3)$$

Случай 2. *Корни характеристического уравнения действительны и равны*: $k_1 = k_2 = k$.

В этом случае непосредственно находим лишь одно частное решение: $y_1 = e^{kx}$.

Вторым частным решением является решение $y_2 = xe^{kx}$. Действительно,
$y_2' = \left(xe^{kx}\right)' = x'e^{kx} + x\left(e^{kx}\right)' = e^{kx} + xke^{kx} = e^{kx}(1+kx),$
$y_2'' = \left(e^{kx}\right)'(1+kx) + e^{kx}(1+kx)' = ke^{kx}(1+kx) + e^{kx}k = e^{kx}\left(2k + k^2 x\right).$

Подставив выражение для y, y' и y'' в уравнение (1), получим
$$e^{kx}\left(2k + k^2 x\right) + pe^{kx}(1+kx) + qxe^{kx} = e^{kx}\left(x\left(k^2 + pk + q\right) + 2k + p\right) = 0.$$

Так как k является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, корни квадратного трехчлена находятся по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Если $k_1 = k_2 = k$, то $p^2 - 4q = 0$, т.е. $k = -\dfrac{p}{2}$ или $2k + p = 0$.

Покажем, что $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:
$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{kx}e^{kx}(1+kx) =$$
$$= e^{2kx}[1 + kx - kx] = e^{2kx} \neq 0.$$

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид
$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \qquad (4)$$

Случай 3. *Корни характеристического уравнения комплексные числа*:
$k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, $p^2 - 4q < 0$.

Тогда $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{i^2\left(4q - p^2\right)}}{2} = -\dfrac{p}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Обозначив $a = \dfrac{-p}{2}$ и $b = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, получим $k_1 = a + bi$ и $k_2 = a - bi \quad (b \neq 0)$.

В этом случае $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$ являются решениями уравнения (1) и, вычисляя вронскиан, убедимся, что они составляют фундаментальную систему. Действительно,
$y_1' = \left(e^{ax}\right)' \cdot \cos bx + e^{ax} \cdot (\cos bx)' = a \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + e^{ax} \cdot (-\sin bx) \cdot b =$
$= e^{ax} \cdot (a \cdot \cos bx - b \cdot \sin bx).$

$$y_2' = \left(e^{ax}\right)' \cdot \sin bx + e^{ax} \cdot (\sin bx)' = a \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + e^{ax} \cdot \cos bx \cdot b =$$
$$= e^{ax}(a \cdot \sin bx + b \cdot \cos bx).$$

Подставим выражения для $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_2(x)$ и $y_2'(x)$ в вронскиан, получим
$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{ax} \cos bx \, e^{ax}(a \sin bx + b \cos bx) -$$
$$- e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx) e^{ax} \sin bx = e^{2ax} \cos bx (a \sin bx + b \cos bx) -$$
$$- e^{2ax} \sin bx (a \cos bx - b \sin bx) = e^{2ax}\big(a \cos bx \sin bx + b \cos^2 bx -$$
$$- a \sin bx \cos bx + b \sin^2 bx\big) = e^{2ax} b \left(\cos^2 bx + \sin^2 bx\right) = e^{2ax} b \neq 0.$$

При вычислении воспользовались основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Таким образом, общее решение уравнения (1) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид
$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$, или
$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \qquad (5)$$

Образцы решения задач

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y'' + 7y' + 12y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2 + 7k + 12 = 0$.

Корни найдем по формуле
$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2},$$ откуда $k_1 = -3$ и $k_2 = -4$.

Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу (2.14), получим общее решение $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$.

Дифференцируя общее решение, получим
$y' = C_1 e^{-3x}(-3) + C_2 e^{-4x}(-4) = -3C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{-4x}$.

Согласно заданным начальным условиям имеем
$$\begin{cases} 1 = C_1 e^{-3\cdot 0} + C_2 e^{-4\cdot 0}, \\ -2 = -3C_1 e^{-3\cdot 0} - 4C_2 e^{-4\cdot 0}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ -2 = -3C_1 - 4C_2, \end{cases}$$
$$\text{или} \begin{cases} C_2 = 1 - C_1, \\ -2 = -3C_1 - 4(1 - C_1), \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} C_2 = 1 - C_1, \\ 2 = C_1, \end{cases}$$ откуда
$C_1 = 2$ и $C_2 = -1$. Таким образом, искомым частным решением является функция $y = 2e^{-3x} - e^{-4x}$.

Пример 2. Найти решение уравнения $y'' - y' - 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2-k-6=0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 6}}{2}=\dfrac{1\pm 5}{2}$, откуда $k_1=3$ и $k_2=-2$. Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу (2), получим общее решение $y=C_1\cdot e^{3x}+C_2\cdot e^{-2x}$.

Пример 3. Найти решение уравнения $y''+8y'+16y=0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2+8k+16=0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot 16}}{2}=\dfrac{-8\pm 0}{2}=-4$, откуда $k_1=k_2=-4$. Подставляя найденные значения k в формулу (3), получим общее решение $y=e^{-4x}\cdot(C_1+C_2\cdot x)$.

Пример 4. Найти решение уравнения $y''+9y=0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2+9=0$
$k^2=-9;\quad k_{1,2}=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9\cdot(-1)}=\pm 3\cdot i.$ Уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2}=\pm 3i\quad (a=0;\quad b=3).$

По формуле (4) общим решением будет

$$y=e^{0x}(C_1\cdot\cos\ 3x+C_2\sin\ 3x),$$

или $y=C_1\cdot\cos 3x+C_2\cdot\sin 3x.$

Пример 5. Найти частное решение уравнения $y''-6y'+10y=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=1,\quad y'(0)=3.$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2-6k+10=0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 10}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{6\pm 2i}{2}=3\pm i.$
$(a=3;\quad b=3).$

По формуле (4) общим решением будет

$$y=e^{3x}\cdot(C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x).$$

Дифференцируя общее решение, получим
$y'=3e^{3x}(C_1\cdot\cos x+C_2\sin x)+e^{3x}(-C_1\cdot\sin x+C_2\cdot\cos x).$

Подставив начальные условия $y(0)=1,\quad y'(0)=3$ получим систему для определения C_1 *и* C_2:

$$\begin{cases}1=e^0\cdot(C_1\cdot\cos 0+C_2\cdot\sin 0),\\ 3=3\cdot e^0(C_1\cdot\cos 0+C_2\cdot\sin 0)+e^0(-C_1\cdot\sin 0+C_2\cdot\cos 0),\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1 = 1\cdot(C_1\cdot 1 + C_2\cdot 0), \\ 3 = 3\cdot 1(C_1\cdot 1 + C_2\cdot 0) + 1(-C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1 = C_1; & C_1 = 1. \\ 3 = 3C_1 + C_2; & C_2 = 0. \end{cases}$$

Подставив полученные значения $C_1 = 1,\ C_2 = 0$ в общее решение, получим $y = e^{3x}\cdot\cos x$ – искомое частное решение.

На основании вышеизложенного можно составить таблицу, которой удобно пользоваться при решении дифференциальных уравнений:

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$. Заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1. $k^2 + pk + q = 0$ (*). Найти $k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.		
Случай 1. *Корни характеристического уравнения действительны и различны*	$k_2 \neq k_1$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
Случай 2. *Корни характеристического уравнения действительны и равны*	$k_1 = k_2 = k$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$
Случай 3. *Корни характеристического уравнения комплексные*:	$p^2 - 4q < 0$ Введем $i^2 = -1$. Тогда $p^2 - 4q = i^2(4q - p^2)$ или $k_{1,2} = a \pm bi$	$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2 \sin bx)$

Задачи для индивидуальных заданий

Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

1. а) $y'' + 5y' + 6y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
   б) $y'' + 16y = 0$;
   в) $y'' + 6y' + 9y = 0$.
2. а) $y'' - 2y' = 0$, если $y(0) = \frac{3}{2}$, $y'(0) = 1$;
   б) $y'' + 8y' + 16y = 0$;
   в) $y'' + 6y' + 25y = 0$.
3. а) $y'' + 8y' + 15y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
   б) $y'' + 2y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - 10y' + 25y = 0$.

4 .а) $y'' + 3y' = 0$;

б) $y'' + 9y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$;

в) $y'' + 12y' + 36y = 0$.

5. а) $y'' + 14y' + 49y = 0$;

б) $y'' + 4y' = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

6. а) $y'' + 4y = 0$;

б) $y'' - 2y' - 8y = 0$;

в) $y'' - 8y' + 16y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$.

2.7. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' + 8y' + 16y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' + 16y = 0$.

8. а) $y'' + 2y' + 5 = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' - 2y = 0$;

в) $y'' - 14y' + 49y = 0$.

9. а) $y'' - y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' + 64y = 0$;

в) $y'' - 20y' + 100y = 0$.

10.а) $y'' - 8y' + 20y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$;

б) $y'' - 7y' + 12y = 0$;

в) $y'' - 2y' + y = 0$.

11. а) $y'' + 3y' - 4y = 0$;

б) $y'' + 2y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$.

12. а) $y'' - 9y' + 14y = 0$;

б) $y'' - y = 0$;

в) $y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.

13. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 9y = 0$;

в) $y'' + 22y' + 121y = 0$.

14. а) $y'' - y = 0$;

б) $y'' - 6y' + 45y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

15. а) $y'' - 2y' + 2y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 2y' = 0$;

в) $y'' + 2y' + y = 0$.

16. а) $y'' + 6y' + 8y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$.

17. а) $y'' + 4y' + 8y = 0$;

б) $y'' - 9y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$;

в) $9y'' + 6y' + 1 = 0$.

18. а) $y'' - y' - 2y = 0$, если $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;

б) $16y'' + 8y' + y = 0$;

в) $y'' + 25y = 0$.

19. а) $y'' - 8y' + 7 = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $25y'' - 10y' + y = 0$.

20. а) $y'' - 5y' + 4y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $49y'' + 14y' + y = 0$;

в) $y'' + 121y = 0$.

21. а) $y'' + 2y' - y = 0$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y(0) = y(0) = 1$;

в) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

22. а) $2y'' - 3y' - 5y = 0$;

б) $y'' + 4y = 0$, если $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$;

в) $64y'' - 16y' + y = 0$.

23. а) $y'' + 6y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 81y = 0$;

в) $4y'' + 4y' + y = 0$.

24. а) $y'' + 8y' + 7y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 4y = 0$;

в) $16y'' + 8y' + y = 0$.

25. а) $y'' + y' = 0$, если $y(0) = y(0) = 1$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $y'' + 26y' + 169y = 0$ 3.25.

Задача 6 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теоретический материал

Линейное неоднородное уравнение отличается от однородного функцией в правой части. Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \qquad (1)$$

а соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,$$

которое, как известно, решается с помощью характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Сформулируем теорему о структуре общего решения неоднородного уравнения (1).

Теорема (о структуре общего решения). Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пусть y – общее решение уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$,

$y_ч$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения, y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Тогда

$$y = y_0 + y_ч.$$

Таким образом, основная задача при решении неоднородного линейного дифференциальные уравнения второго порядка состоит в нахождении какого-либо частного решения.

Укажем один из методов нахождения частного решения неоднородного уравнения, когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид. К таким функциям $f(x)$ относятся следующие функции: экспонента $e^{\alpha x}$ $(\alpha = \mathrm{const})$; многочлены n-й степени относительно переменной x $P_n(x)$; тригонометрические функции $\cos nx$; $\sin nx$, а также их произведения.

Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод иначе называется методом подбора частного решения $y_ч$ – уравнения (1) по виду правой части $f(x)$.

Пусть правая часть $f(x)$ *уравнения* (1) *имеет вид* $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, т. е. представляет собой произведение экспоненты на многочлен, где α – const; $P_n(x)$ – многочлен n-й относительно x. В этом случае уравнение примет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}. \tag{2}$$

Тогда возможны следующие варианты.

1)Число α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Тогда частное решение нужно искать в виде $y_ч = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$– многочлен той же степени, что и данный многочлен $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

2)Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с одним корнем характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_ч = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x$.

3)Число α есть двукратный корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с двумя равными корнями характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_ч = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^2$. Неизвестные (неопределенные) коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ находим из условия, что функция $y_ч$ является решением уравнения (2.18), т. е. удовлетворяет этому уравнению.

Пусть правая часть $f(x)$ *уравнения* (1) имеет вид

$$f(x) = M \cdot \cos \beta x + N \cdot \sin \beta x,$$

где M *и* N – постоянные числа. Тогда вид частного решения $y_ч$ определяется следующим образом.

а) Если число βi не есть корень характеристического уравнения , то частное решение $y_ч$ имеет вид

$$y_ч = A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x,$$

где A и B – постоянные неопределенные коэффициенты.

б) Если число βi есть корень характеристического уравнения, то

$$y_ч = (A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x) \cdot x.$$

Сделаем важное замечание. Даже тогда, когда в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos \beta x$ или только $\sin \beta x$, следует искать частное решение в том виде, в каком оно было указано, т. е. с синусом и косинусом. Иными словами, из того, что правая часть не содержит $\cos \beta x$ или $\sin \beta x$, не следует, что частное решение уравнения не содержит этих функций.

На основании вышеизложенного можно составить таблицу, которой удобно пользоваться при решении дифференциальных уравнений:

<table>
<tr><td colspan="3">Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x), y = y_ч + y_o$,
y_o – решение однородного уравнения,
$y_ч$ – частное решение неоднородного уравнения</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Случай 1.
$f(x) = P_n(x) \cdot e^{ax}$</td><td>$a \neq k_1, a \neq k_2$</td><td>$y_ч = Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>$a = k_2 \neq k_1$</td><td>$y_ч = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
</table>

	$a = k_2 = k_1$	$y_ч = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{ax}$
Случай 2. $f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_n \sin bx\right)$	$z=a+bi$ не является корнем характеристического уравнения (*) $y_ч = e^{ax}\left(S_n(x)\cos bx + T_n(x)\sin bx\right)$	
	$z=a+bi$ является корнем характеристического уравнения (*) $y_ч = xe^{ax}\left(S_n(x)\cos bx + T_n(x)\sin bx\right)$	

Рассмотрим примеры, на которых покажем не только принцип применения метода, но и *порядок оформления* решения.

Образцы решения задач

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + 7k + 12 = 0.$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}.$$

$$k_1 = -3; \qquad k_2 = -4.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-4x}.$$

3) Запишем формулу, по которой следует искать частное решение $y_ч$ данного уравнения. Для этого сравним правую часть уравнения $f(x) = 24x^2 + 16x - 15$ с общим видом правой части:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x).$$

$24x^2 + 16x - 15$ – многочлен второй степени с коэффициентами 24; 16; –15.

В данном случае показательная функция $e^{\alpha x} = 1$, т. е. $\alpha = 0$. Так как $\alpha = 0$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения $(k_1 = -3; \ k_2 = -4)$, частное решение нужно искать в виде $y_ч = Ax^2 + Bx + C.$

$Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C -$ многочлен второй степени $(n = 2)$, неизвестные (неопределенные) коэффициенты *A, B, C* этого многочлена нужно найти, подставив выражения $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ в данное уравнение.

4) Запишем $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 12 & y_ч = Ax^2 + Bx + C; \\ 7 & y_ч' = 2Ax + B; \\ 1 & y_ч'' = 2A. \end{array}$$

Слева указаны коэффициенты 12, 7, 1, на которые следует умножить $y_ч, y_ч', y_ч''$, чтобы получить левую часть уравнения $y''+7y'+12y=24x^2+16x-15$. В левой части получим многочлен второй степени с неопределенными коэффициентами, который должен быть равен данному многочлену второй степени в правой части. Два многочлена будут равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях *x*. Запишем столбиком полученные уравнения:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^2 & 12A=24; \\ x^1 & 14A+12B=16; \\ x^0 & 2A+7B+12C=-15. \end{array}\right\}$$

Имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными коэффициентами *A, B, C*.

Решив ее, найдем $A=2, \quad B=-1, \quad C=-1$.

Частное решение: $y_ч=2x^2-x-1$.

5) Общее решение данного уравнения:

$$y=y_0+y_ч,$$

или

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-4x}+2x^2-x-1.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''+y'-2y=3e^x$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2+k-2=0, \qquad k_1=-2; \quad k_2=1.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$:

$$y_0=C_1e^{-2x}+C_2e^x.$$

3)Сравним правую часть данного дифференциального уравнения $f(x)=3e^x$ с $f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$. Отметим, что $\alpha=1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения; многочлен – число 3 – нулевой степени, т. е. $n=0$. Поэтому частное решение $y_ч$ следует искать в виде $y_ч=A\cdot e^x\cdot x$.

4) Запишем

$$\begin{array}{r|l} -2 & y_ч=A\cdot e^x\cdot x, \\ 1 & y_ч'=A\cdot e^x+A\cdot e^x\cdot x, \\ 1 & y_ч''=A\cdot e^x+A\cdot e^x+A\cdot e^x\cdot x. \end{array}$$

Подставив выражения $y_ч, y_ч', y_ч''$ с указанными коэффициентами в данное дифференциальное уравнение, получим

$$2A\cdot e^x+A\cdot e^x\cdot x+A\cdot e^x+A\cdot e^x\cdot x-2A\cdot e^x\cdot x=3e^x,$$

или

$$3A\cdot e^{x}=3e^{x},$$

откуда $A=1$. Частное решение: $y_ч=x\cdot e^{x}$.

5) Искомое общее решение данного уравнения:

$$y=C_1\cdot e^{-2x}+C_2\cdot e^{x}+x\cdot e^{x}.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''-y=x\cdot e^{-x}$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2-1=0;\qquad k_1=-1;\qquad k_2=1.$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$:

$$y_0=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{x}.$$

3)Сравним правую часть данного уравнения $f(x)=x\cdot e^{-x}$ с $f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$. Отмечаем, что $\alpha=-1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения и многочлен x степени $n=1$. Поэтому частное решение следует искать в виде $y_ч=(Ax+B)\cdot x\cdot e^{-x}$.

4) Так как требуется найти $y_ч,\ y_ч',\ y_ч''$, удобнее записать $y_ч$ в виде $y_ч=(Ax^2+Bx)\cdot e^{-x}$.

Запишем $y_ч,\ y_ч',\ y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l}
-1 & y_ч=(Ax^2+Bx)\cdot e^{-x}, \\
0 & y_ч'=(2Ax+B)\cdot e^{-x}-(Ax^2+Bx)\cdot e^{-x}, \\
1 & y_ч''=2A\cdot e^{-x}-(2Ax+B)\cdot e^{-x}-(2Ax+B)\cdot e^{-x}+(Ax^2+Bx)\cdot e^{-x}.
\end{array}$$

Подставим выражения $y_ч,\ y_ч''$ с указанными коэффициентами в данное уравнение. Получим равенство

$$2A\cdot e^{-x}-2(2Ax+B)\cdot e^{-x}+(Ax^2+Bx)\cdot e^{-x}-(Ax^2+Bx)\cdot e^{-x}=x\cdot e^{-x}.$$

Разделим уравнение на $e^{-x}\neq 0$ и упростим:

$$2A-2(2Ax+B)=x,$$

$$2A-4Ax-2B=x.$$

$$\begin{array}{l|l}
x^1 & -4A=1; \\
x^0 & 2A-2B=0,
\end{array}\Bigg\}\qquad \begin{cases} A=-1/4; \\ B=-1/4. \end{cases}$$

Частное решение: $y_ч=-\dfrac{1}{4}(x^2+x)\cdot e^{-x}$.

5)Общее решение дифференциального уравнения:

$$y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{x}-\frac{1}{4}(x^2+x)\cdot e^{-x}.$$

Пример 4. Решить уравнение $y''+3y'+2y=4\sin 3x+2\cos 3x$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:
$k^2 + 3k + 2 = 0;$

$k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2}.$

$k_1 = -1; \qquad k_2 = -2.$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x}.$$

3) Сравним правую часть уравнения $f(x) = 4\sin 3x + 2\cos 3x$ с $f(x) = M \cdot \cos \beta x + N \cdot \sin \beta x$. Здесь $M = 2, \quad N = 4; \quad \alpha = 0, \quad \beta = 3.$ Так как числа $\pm \beta i = \pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, частное решение следует искать в виде $y_ч = A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x.$

4) Найдем $y_ч'$, $y_ч''$ и запишем столбиком

$$\begin{array}{c|l} 2 & y_ч = A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x, \\ 3 & y_ч' = -3A \cdot \sin 3x + 3B \cdot \cos 3x, \\ 1 & y_ч'' = -9A \cdot \cos 3x - 9B \cdot \sin 3x. \end{array}$$

Подставив эти выражения в данное дифференциальное уравнение, получим
$-9A \cdot \cos x - 9B \cdot \sin 3x - 9A \cdot \sin 3x + 9B \cdot \cos 3x + 2A \cdot \cos 3x + 2B \cdot \sin 3x =$
$= 4\sin 3x + 2\cos 3x$ или
$\sin 3x \cdot (-7B - 9A) + \cos 3x \cdot (-7A + 9B) = 4\sin 3x + 2\cos 3x.$

Приравниваем коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$ в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} \sin 3x & -7B - 9A = 4; \\ \cos 3x & -7A + 9B = 2, \end{array}\Bigg\}$$

$$A = -\frac{5}{13}; \qquad B = -\frac{1}{13}.$$

Частное решение: $y_ч = -\dfrac{5}{13}\cos 3x - \dfrac{1}{13}\sin 3x.$

5) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{5}{13}\operatorname{cox} 3x - \frac{1}{13}\sin 3x.$$

Пример 5. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x.$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:
$k^2 + 2k + 5 = 0;$

$k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \ (a = -1; \quad b = 2).$

2)По формуле (2.16) общим решением будет

$$y_0 = e^{-x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x).$$

3)Сравним правую часть уравнения $f(x) = 2\cos x$ с $f(x) = M \cdot \cos \beta x + N \cdot \sin \beta x.$

Здесь $M = 2, \quad N = 0; \quad \beta = 1.$ Числа $\pm \beta i = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Частное решение следует искать в виде

$$y_ч = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x.$$

4) Запишем

$$\begin{array}{r|l} 5 & y_ч = A\cos x + B\sin x, \\ 2 & y_ч' = -A\sin x + B\cos x, \\ 1 & y_ч'' = -A\cos x - B\sin x. \end{array}$$

Подставив $y_ч,\ y_ч',\ y_ч''$ в уравнение, получим

$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = 2\cos x,$

или $\sin x \cdot (4B - 2A) + \cos x \cdot (4A + 2B) = 2\cos x.$

Задачи для индивидуальных заданий

Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, используя метод подбора коэффициентов частного решения (метод неопределенных коэффициентов)

3.1. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x) \cdot e^{3x}.$

3.2. $y'' - 4y' + 4y = x \cdot e^{2x}.$

3.3. $y'' + 6y' + 34y = 5x \cdot e^{-3x}.$

3.4. $9y'' + 24y' + 16y = -5x \cdot e^{3x}.$

3.5. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x.$

3.6. $y'' - 3y' + 2y = x \cdot e^{x}.$

3.7. $y'' - 3y' + 2y = 10 \cdot e^{-x}.$

3.8. $y'' - 2y' + y = x^3.$

3.9. $y'' + 6y' + 34y = 5x \cdot e^{-2x}.$

3.10. $y'' + y' = 3 \cdot e^{-x} + 2x.$

3.11. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x.$

3.12. $y'' + 2y' = -2e^{x}(\sin x + \cos x).$

3.13. $y'' + y' - 2y = x^2 \cdot e^{4x}.$

3.14. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x.$

3.15. $y'' - y' = x + 2.$

3.16. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x.$

3.17. $y'' + 6y' + 34y = 5x^2$

3.18. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x).$

3.19. $y'' + 2y' + y = x^2 + x - 1.$

3.20. $y'' + 2y' = e^{x}(\sin x + \cos x).$

3.21. $y'' - y' = 2x + 3.$

3.22. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$

3.23. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x.$

3.24. $3y'' + y' = 6x - 1.$

3.25. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + 2x.$