

Лекция №3 Тема 4.2. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные и дифференциалы высших порядков. Частные производные сложных функций, неявно заданных функций.

5. Частные производные высших порядков.

Если функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D , то ее частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка**.

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка**.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными**.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x, y)$ и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

$$d^2z = d[f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy] = f''_{xx}(x, y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yy}(x, y)(dy)^2$$

$$d^3z = f'''_{xxx}(x, y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2y}(x, y)(dx)^2dy + 3f'''_{xy^2}(x, y)dx(dy)^2 + f'''_{yyy}(x, y)(dy)^3$$

.....

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего с скобках выражения.