Лекция: Комплексные числа и действия над ними

Комплексным числом z называется выражение следующего вида:

$$z = x + i \cdot y,$$

где x и y – действительные числа; i – так называемая *мнимая единица*, определяемая равенством

$$i^2 = -1,\ i = \sqrt{-1};$$

$x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть; $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа.

Назовём выражение $z = x + i \cdot y$ – *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Комплексное число $\bar{z}$ называется сопряженным комплексному числу z, если $\operatorname{Re}\bar{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im}\bar{z} = -\operatorname{Im} z$. Другими словами, если $z = x + i \cdot y$, то $\bar{z} = x - i \cdot y$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ и $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ равны, если их действительные и мнимые части соответственно равны:

$$z_1 = z_2, \text{ если } x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

Всякое комплексное число $z = x + i \cdot y$ можно изобразить на плоскости Oxy в виде точки $M(x, y)$ с координатами x и y. Обратно, каждой точке плоскости $M(x, y)$ соответствует комплексное число $z = x + i \cdot y$. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется плоскостью комплексной переменной z (на плоскости ставят символ z в кружок).

При этом множество всех действительных чисел изображается точками оси абсцисс, которая поэтому называется действительной осью, множество чисто мнимых чисел $i \cdot y$ изображается точками оси ординат, называемой мнимой осью. Заметим, что одна точка мнимой оси, а именно начало координат, изображает действительное число нуль.

Соединив точку $M(x, y)$ с началом координат, получим вектор $\overline{OM}$. В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображения комплексного числа $z = x + i \cdot y$ вектор $\overline{OM}$.

Рассмотрим комплексное число $z = x + i \cdot y$, которому на плоскости Oxy соответствует точка $M(x, y)$. Ее координатами в полярной системе координат будет пара чисел (ρ, φ).

Тогда по формулам перехода от декартовой системы координат к полярной имеем (рис. 4.1) $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$. Подставим эти выражения в алгебраическую форму комплексного числа $z = x + i \cdot y = \rho\cos\varphi + i \cdot \rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

Полученная форма комплексного числа называется тригонометрической.

Полярный радиус $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ называется *модулем комплексного числа* и обозначается $|z| = \rho$.

Модуль комплексного числа определяется однозначно по формуле $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Полярный угол ϕ называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $\phi = Arg\ z$. Тогда

$$z=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)=|z|(\cos Arg\ z+i\sin Arg\ z).$$

Аргумент комплексного числа определяется не однозначно, с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k – любое целое число. *Главным значением аргумента* называется значение, заключенное в интервале $(-\pi, \pi]$. Обозначается оно $\arg z$. Таким образом, $-\pi<\arg z\le\pi$.

Очевидно, $Arg\ z=\arg z+2k\pi$.

Аргумент комплексного числа считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси Ox, и отрицательным при противоположном направлении отсчёта. Сопряжённые комплексные числа имеют равные модули, а их аргументы отличаются знаком, но равны по абсолютной величине.

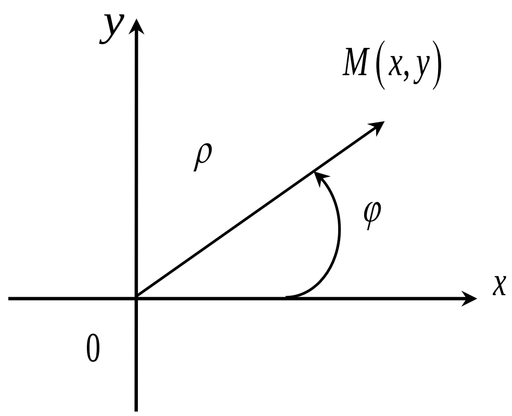

Рис. 4.1

Так как $\operatorname{tg}\arg z=\frac{y}{x}$, то главное значение аргумента определяется однозначно следующим образом:

$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, если точка $M(x,y)$ лежит в первой или четвёртой четверти;

$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\pi$, если точка $M(x,y)$ лежит во второй четверти;

$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-\pi$, если точка $M(x,y)$ лежит во третьей четверти.

Тригонометрическая форма комплексного числа будет иметь вид

$$z=|z|(\cos(\arg z+2k\pi)+i\sin(\arg z+2k\pi)).$$

Пусть $z=x+i\ y=|z|(\cos Arg\ z+i\sin Arg\ z)$. Используя формулу Эйлера $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$, получаем так называемую *показательную форму* записи комплексного числа:

$$z=|z|\,e^{i\ Arg\ z}.$$

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов с учетом того, что $i^2=-1$; $i^3=-i$; $i^4=1$.

Суммой двух комплексных чисел $z = x_1 + iy_1$ и $z = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$(x_1 + i\ y_1) + (x_2 + i\ y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

разностью двух комплексных чисел $z = x_1 + iy_1$ и $z = x_2 + iy_2$ будет комплексное число

$$(x_1 + i\ y_1) - (x_2 + i\ y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

При записи результата следует отделить действительную часть от мнимой части, т. е. объединить отдельно члены, содержащие множитель i, и члены, не содержащие множитель i:

Произведением двух комплексных чисел называется комплексное число, которое имеет вид

$$(x_1 + i\ y_1) \cdot (x_2 + i\ y_2) = (x_1\ x_2 - y_1\ y_2) + i(x_1\ y_2 + y_1\ x_2);$$

в частности, $z \cdot \overline{z} = |\,z\,|^2$.

Операции сложения и вычитания сводятся к сложению и вычитанию векторов, изображающих эти числа. Отсюда расстояние между точками $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

Деление комплексных чисел выполняется по правилу

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}.$$

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1);\ z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2),$$

то действия над ними выполняют следующим образом:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Для *возведения комплексных чисел в целую степень* применяют формулу Муавра

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Формула справедлива для целых положительных и отрицательных n.

Правило извлечения корня n - й степени из комплексного числа

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

Следовательно, корень n - й степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Уравнения вида $x^n = A$ называются *двучленными*. Найдём корни этого уравнения. Если A есть действительное положительное число, то

$$x = \sqrt[n]{A}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),\text{ где } k = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Выражение в скобках даёт все значения корня n - й степени из 1.

Если A – действительное отрицательное число, то

$$x=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).$$

Выражение в скобках даёт все значения корня n - й степени из -1.

Если A – комплексное число, то применяют формулу *извлечения корня n - й степени из комплексного числа*.

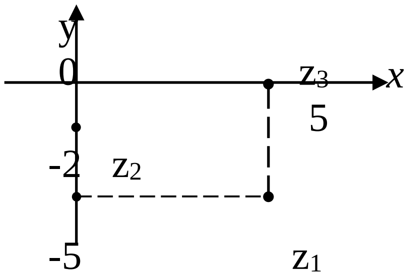

Рис. 4.2

Пример 1. Изобразить комплексные числа $z_1=5-5i$, $z_2=-2i$; $z_3=5$ точками на плоскости Oxy.

Решение. Данным комплексным числам будут соответствовать точки с координатами $M_1(5,-5)$, $M_2(0,-2)$. $M_3(5,0)$ на плоскости Oxy (рис. 4.2).

Пример 2. Написать в тригонометрической форме комплексное число $z=-1+i$.

Решение. Найдём модуль и аргумент комплексного числа по приведённым выше формулам $|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi=-1$; значит,

$$\arg z=\operatorname{arctg}(-1)+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3}{4}\pi.$$

Подставим в формулу тригонометрической формы записи комплексного числа и получим $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Пример 3. Представить в показательной форме комплексное число $z=-1-i$.

Решение. Найдём модуль и аргумент комплексного числа

$$|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};\quad \operatorname{tg}\varphi=1;$$

$\arg z=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3}{4}\pi$, тогда показательная форма будет

$$-1-i=\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}.$$

Пример 4. Вычислить $e^{\pi i}$.

Решение. По формуле Эйлера можно представить

$$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$$

Пример 5. Вычислить $(2+i)\cdot(2-3i)$.

Решение. Выполним умножение комплексных чисел в алгебраической форме

$$(2+i)\cdot(2-3i)=4-6i+2i-7i^2=7-4i.$$

Пример 6. Вычислить $\dfrac{(2+i)}{(2-3i)}$

Решение. Выполним деление комплексных чисел в алгебраической форме

$$\frac{2+i}{2-3i}=\frac{(2+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{4+2i+3i+3i^2}{4-9i^2}=\frac{4+5i+3(-1)}{4-9(-1)}=$$

$$=\frac{1+5i}{13}=\frac{1}{13}+i\frac{5}{16}.$$

Пример 7. Вычислить $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$.

Решение. Найдём модуль и аргумент комплексного числа

$$|z|=\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{3+1}=2;\ \arg(\sqrt{3}-i)=\operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{\pi}{6}.$$

Преобразуем комплексное число к тригонометрическому виду

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right).$$

Затем для возведения в степень применим формулу Муавра

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^5=2^5\left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi+10k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi+10k\pi\right)\right)=$$

$$=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-16\sqrt{3}-16i.$$

Пример 8. Найти все значения корня $\sqrt[3]{-8}$.

Решение. Найдём модуль и аргумент комплексного числа $|z|=|-8|=8;\ \arg(-8)=\pi$. Далее запишем комплексное число в тригонометрической форме

$$-8=8\left(\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)\right).$$

Применим формулу извлечения корня из комплексного числа

$$\sqrt[3]{-8}=2(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}),$$

где $k=0;1;2$.

Подставляя в неё вместо k числа $0,1,2$, получим соответственно три разных значения корня:

$$(\sqrt[3]{-8})_1=2(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3})=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=1+i\sqrt{3};$$

$$(\sqrt[3]{-8})_2=2(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3})=2(-1+i\cdot 0)=-2;$$

$$(\sqrt[3]{-8})_3=2(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3})=2(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=1-i\sqrt{3}.$$