

Интегрирование рациональной дроби.

1. Интегрирование простейших дробей

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{1}{ax+b}; \\ \text{II.} & \frac{1}{(ax+b)^m}; \\ \text{III.} & \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}; \\ \text{IV.} & \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} \end{array}$$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2, n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой $t = ax + b$.

$$\text{I.} \quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln|t| + C = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \\ &\cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \end{aligned}$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48} dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23} dx = \left. \begin{cases} u=6x-5; & du=6dx; \\ x=\frac{u+5}{6}; \end{cases} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{14u+70-24}{u^2+23} du = \frac{7}{3} \int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3} \int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6} \ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6} \ln|36x^2-60x+48| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49} dx = \left. \begin{cases} u=x+3; & du=dx; \\ x=u-3; \end{cases} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49} du = 5 \int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$- 18 \int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2} \ln|u^2-49| - \frac{18}{14} \ln \left| \frac{u-7}{u+7} \right| + C = \frac{5}{2} \ln|x^2+6x-40| - \frac{9}{7} \ln \left| \frac{x-4}{x+10} \right| + C.$$

Пример.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}} dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}} dx = \left. \begin{cases} u=x-3; & du=dx; \\ x=u+3; \end{cases} \right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}} du = 3 \int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+ 13 \int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13 \arcsin \frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13 \arcsin \frac{x-3}{4} + C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при $M = 0$, $N = 1$.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n} du = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s} \int \frac{u^2 du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим:
$$\left\{ \begin{array}{l} dv_1 = \frac{u du}{(u^2 + s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ v_1 = \int \frac{u du}{(u^2 + s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2 + s)^{n-1}}; \end{array} \right\}$$

$$\int \frac{u^2 du}{(u^2 + s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2 + s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2 + s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2 + s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2 + s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2 + s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной**. Если применить ее $n-1$ раз, то

получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2 + s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx &= (4a)^n \int \frac{Mx + N}{[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2ax + b; \quad du = 2adx; \\ x = \frac{u-b}{2a}; \quad s = 4ac - b^2; \end{array} \right\} = \\ &= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\frac{M(u-b)}{2a} + N}{(u^2 + s)^n} du = \frac{(4a)^n}{2a} \left[\frac{M}{2a} \int \frac{udu}{(u^2 + s)^n} + \frac{2aN - Mb}{2a} \int \frac{du}{(u^2 + s)^n} \right] \end{aligned}$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$

приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью n , а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2} dx &= \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x-2; \quad du = dx; \\ x = u+2; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2} du = \\
&= 3 \int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11 \int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{array} \right\} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} + 11 \left[\frac{u}{3 \cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{du}{u^2+3} \right] = \\
&= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$