Интегрирование тригонометрических выражений

3. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тогда $x = 2arctgt; \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример.

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример.

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]} = 2\int \frac{dt}{t^2+2t+17} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+16} =$$

$$= \frac{1}{2} arctg \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} arctg \frac{tg\frac{x}{2}+1}{4} + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *если*

функция R является нечетной относительно cosx.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = \sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x dx$$

Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать cosx только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно sinx.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos x dx = \int r(t)dt.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} = \begin{cases} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4} dt = \int \frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3\int \frac{dt}{t^2} +$$

$$+ 3\int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ *если*

функция R является нечетной относительно sinx.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка *t = cosx.*

Тогда $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(\cos x) \sin x dx = -\int r(t) dt.$

Пример.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx = \begin{cases} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{cases} = -\int \frac{1-t^2}{2+t} dt = \int \frac{t^2 + 4t + 4 - 4t - 5}{t+2} dt = \int \left[\frac{(t+2)^2 - 4t - 5}{t+2} \right] dt =$$

$$= \int \left[t + 2 - \frac{4t}{t+2} - \frac{5}{t+2} \right] dt = \int t dt + \int 2 dt - 4\int \frac{t dt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2} dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{-2}{t+2} + 1 \end{cases} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{dt}{t+2} - 4\int dt = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

функция R четная относительно sinx и cosx.

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка

t = tgx.

Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 6tgx - 16} dx = \left\{ \begin{aligned} & tgx = t; \\ & \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(tgx) = dt \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10} \ln\left| \frac{tgx + 3 - 5}{tgx + 3 + 5} \right| + C = \frac{1}{10} \ln\left| \frac{tgx - 2}{tgx + 8} \right| + C.$$

Интеграл произведения синусов и косинусов

различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n} \right]$$

Пример.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Пример.

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x -$$

$$-\frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{dctg\,2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2ctg\,2x + C$$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$

$$+ \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

Иногда применяются некоторые нестандартные приемы.

Пример.

$$\int \cos(\ln x) dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x; & du = \frac{1}{x}dx; \\ x = e^u; & dx = e^u du; \end{matrix} \right\} = \int e^u \cos u du = \left\{ \begin{matrix} p = \cos u; & dq = e^u du; \\ dp = -\sin u du; & q = e^u; \end{matrix} \right\} = e^u \cos u +$$

$$+ \int e^u \sin u du = \left\{ \begin{matrix} p = \sin u; & dq = e^u du; \\ dp = \cos u du; & q = e^u; \end{matrix} \right\} = e^u \cos u + e^u \sin u - \int e^u \cos u du;$$

Итого $\int e^u \cos u du = e^u (\cos u + \sin u) - \int e^u \cos u du$

$$\int e^u \cos u du = \frac{e^u}{2}(\cos u + \sin u) + C$$

$$\int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$$

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln x \right) + C;$$