

Лекция №5-7 Тема 3.2. Определённый интеграл.

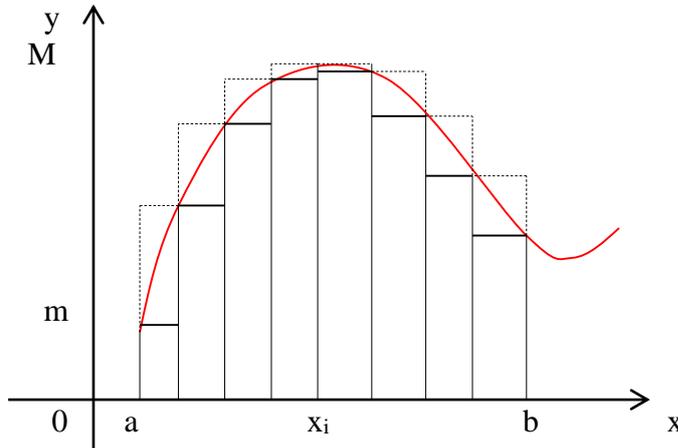
Лекция №5

Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла. Определённый интеграл как предел интегральных сумм. Свойства определённого интеграла; геометрический смысл. Существование первообразной для непрерывной и кусочно-непрерывной функций. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определённого интеграла подстановкой, интегрирование по частям.

Определённый интеграл.

1. Определение и свойства определённого интеграла.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$.



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1; [x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2; \dots [x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\bar{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Сумма \underline{S} называется **нижней интегральной суммой**, а сумма \bar{S} — **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \leq M_i$, то $\underline{S}_n \leq \bar{S}_n$, а $m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \bar{S}_n \leq M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε .

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1) \Delta x_1 + f(\varepsilon_2) \Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i \Delta x_i \leq f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$

$$\text{Следовательно, } \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \bar{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу — вписанной ломаной.

Обозначим $\max \Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min \Delta x_i$ – наименьший. Если $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a, b]$ стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$, то $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = S$.

Определение: Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$ стремится к пределу S , который называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение: $\int_a^b f(x) dx$.

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Определение: Если для функции $f(x)$ существует предел $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке $[a, b]$.

Также верны утверждения: $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

$$1) \int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx;$$

$$2) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4) \text{ Если } f(x) \leq \varphi(x) \text{ на отрезке } [a, b] \text{ } a < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\varepsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на этом отрезке все значения от m до M . Другими словами, существует такое число $\varepsilon \in [a, b]$, что если

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu$ и $\mu = f(\epsilon)$, а $a \leq \epsilon \leq b$, тогда $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\epsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

Обобщенная теорема о среднем. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, и функция $\varphi(x)$ знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ϵ , такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(\epsilon) \int_a^b \varphi(x) dx$$

2. Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x) dx$ нижний предел $a = \text{const}$, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$. Найдем производную функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу x .

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t) dt$ – первообразная функция от $f(x)$. Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число C , то

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x , т.е. при $x = a$:

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$.

$$\text{А при } x = b: \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Заменяв переменную t на переменную x , получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

3. Методы вычисления определенного интеграла.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда если

- 1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$
- 2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$
- 3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция \sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$$\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi, \text{ с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,}$$

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \{ \operatorname{tg} x = t \} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная $\operatorname{tg} x$ имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x

= $\pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.