Определенный интеграл и его геометрический смысл

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором промежутке *X*, а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Определение. Приращение $F(b)-F(a)$ любой из первообразных функций $F(x)+C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется ***определенным интегралом*** от a до b функции $f(x)$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Числа a и b называются пределами интегрирования: $a-$нижним, $b-$верхним. Отрезок $[a;b]$ называется ***отрезком интегрирования***. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, а переменная $x-$***переменной интегрирования***. Таким образом, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Существует и другой подход к введению понятия определенного интеграла, основанный на рассмотрении пределов интегральных сумм, который в большей степени приспособлен для приложений. Рассмотрим его на примере вычисления площади криволинейной трапеции.

Пусть дана фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$, отрезком $[a;b]$ и прямыми $x=a$; $x=b$ (рис. 1). Такую фигуру называют криволинейной трапецией. Найдем ее площадь.

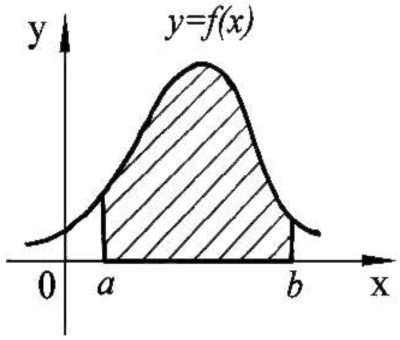

Рис. 1

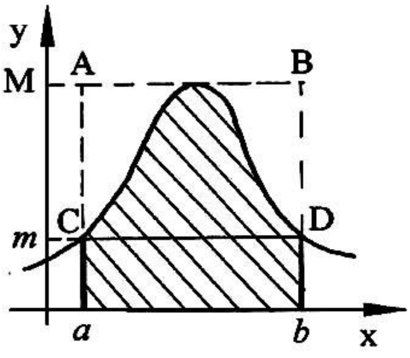

Рис. 2

Заметим, что на отрезке $[a;b]$ можно указать такую точку C, что площадь S криволинейной трапеции равна

$$S = f(C)(b-a). \qquad (2.2)$$

Действительно, пусть $M-$ наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, а $m-$наименьшее. Проведем прямые $y = M$ и $y = m$. Тогда криволинейная трапеция целиком содержится в прямоугольнике $aABb$ и содержит целиком прямоугольник $aCDd$ (рис. 2).

Поэтому $S_{aCDd} < S < S_{aABb}$ или $m(b-a) < S < M(b-a)$, т.к. $S_{aCDd} = m(b-a)$; $S_{aABb} = M(b-a)$. Возьмем число $p = \dfrac{S}{(b-a)}$ и $m < p < M$.

На отрезке $[a;b]$ возьмем такую точку C, что $f(C) = p$. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то каждому значению функции p соответствует хотя бы одно значение ее аргумента C, лежащего внутри отрезка $[a;b]$. Тогда $S = p(b-a)$. Данное свойство называется ***теоремой о среднем.***

Найдем теперь площадь криволинейной трапеции S через определенный интеграл. Разобьем криволинейную трапецию на n полос так, как показано на рис. 3. При этом на отрезке $[a;b]$ появились точки x_1, x_2,..., x_{n-1}.

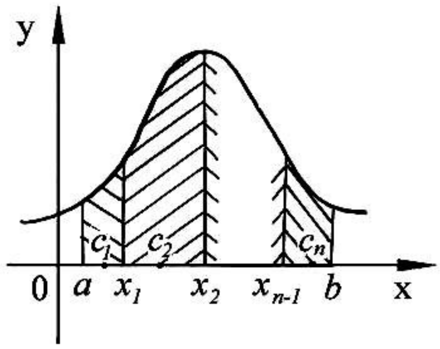

Рис 3

В соответствии с формулой (2.2) найдем для первой полосы точку c_1, $a \le c_1 \le x_1$ такую, что площадь первой полосы равна $f(c_1)(x_1 - a)$.

Для второй полосы найдем точку c_2,

$x_1 \le c_2 \le x_2$ такую, что площадь полосы равна $f(c_2)(x_2 - x_1)$. Поступаем так для всех n полос, т.к. площадь криволинейной трапеции равна сумме площадей полос, на которую она разбита:

$$S = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1}).$$

Такого типа равенство будет иметь место, как бы мы не разбивали криволинейную трапецию на полосы. Длину наибольшего из отрезков обозначим через λ. Перейдем в нем к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$S = \lim_{\lambda \to 0}\left[f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1}) \right].$$

Обозначим

$$\lim_{\lambda \to 0}\left[f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1}) \right],$$

через выражение $\int_a^b f(x)dx$ получим

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (2.3)$$

Таким образом, ввели определенный интеграл через предел особого рода сумм (***интегральных сумм***).

Определение. Пусть дана функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$, где $a < b$. Выполним следующие операции:

1.Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками x_i $(i = 0,1,2,\ldots,n)$, так что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

2.Величину $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n}(x_{i-1} - x_i)$ назовем шагом разбиения.

3.На каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ зафиксируем произвольную точку C_i, $C_i \in [x_{i-1}; x_i]$.

4.Составим сумму всех произведений $f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, $i = 1,...,n$;

$\sigma_n = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + ... + f(c_n)(b - x_{n-1})$ или в сокращенном виде

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_1)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i , \qquad (2.4)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Суммы вида (2.4) называются ***интегральными суммами функции*** $f(x)$.

Очевидно, что при различных разбиениях отрезка $[a;b]$ на части получим различные интегральные суммы вида (2.4). Таким образом, для данной функции $f(x)$ и данного отрезка $[a;b]$ можно составить бесконечное множество интегральных сумм вида (2.4), которые зависят от числа n и от выбора точек деления x_i и точек $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$. В примере вычисления площади криволинейной трапеции точки c_i подбирались специально, что не противоречит определению определенного интеграла через пределы интегральных сумм.

Определение. Если при любой последовательности разбиений отрезка $[a;b]$ таких, что $\lambda = \max \Delta\ x_i \to 0\ (n \to \infty)$, при любом выборе точек $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ интегральная сумма $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ стремится к одному и тому же конечному числу A: $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum f(c_i)\Delta x_i = A$, то число A называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Итак, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\varDelta x_i . \qquad (2.5)$$

Заметим без доказательств, что предел в правой части равенства (2.5) существует и конечен, если $f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Если $f\left(x\right)$ непрерывна и неотрицательна, то определенный интеграл $\int_a^b f\left(x\right)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f\left(x\right)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$; $x=b$ (см. рис. 1), т.е.

$$S=\int_a^b f\left(x\right)dx \quad . \qquad (2.6)$$

В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла. Без доказательства заметим, что оба определения эквивалентны. Второе определение помогает получить приложение определенного интеграла (вычисление площади и т.д.), а формула Ньютона - Лейбница позволяет вычислить определенный интеграл без вычисления предела интегральной суммы.

Примем без доказательства свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^c f\left(x\right)dx+\int_c^b f\left(x\right)dx$, $c\in\left(a,b\right)$.

2. $\int_a^b f\left(x\right)dx=-\int_b^a f\left(x\right)dx$.

3. $\int_b^b f\left(x\right)dx=0$.

4. Если $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ при всех $x\in\left[a;b\right]$, то

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\geq\int_a^b g\left(x\right)dx \, .$$

5.Если $m\leq f\left(x\right)\leq M$ при всех x из промежутка $\left[a;b\right]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Перейдем теперь к правилам вычисления определенных интегралов. Эти правила аналогичны правилам вычисления неопределенных интегралов.

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ ($k -$ постоянная).

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. Интегрирование по частям

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

4. Замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$ делается по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(\varphi'(t))dt,$$

где $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ (f, φ и φ' непрерывны).

Пример 1. Вычислить $\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx$.

Решение. Используя правила 1 и 2, представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx = \int_1^4 dx + 5\int_1^4 x\,dx + \frac{3}{2}\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = x\Big|_1^4 + 5\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 + \frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4 =$$

$$= x\Big|_1^4 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 + x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = (4-1) + \frac{5}{2}\left(4^2 - 1^2\right) + \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = 3 + \frac{75}{2} + 7 = \frac{95}{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$; $dv = x\, dx$, тогда

$$du = (\operatorname{arctg} x)'\, dx = \frac{1}{1+x^2}\, dx,\quad v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 (x \operatorname{arctg} x)\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{0^2}{2}\operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\, dx$.

Решение. Сделаем замену $t = x^2 + 9$, тогда $dt = d(x^2+9)$; $dt = (x^2+9)'\, dx$; $dt = 2x\, dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = x^2 + 9$; если $x = 0$, то $t_{нижн} = 0^2 + 9 = 9$; если $x = 4$, то $t_{верхн} = 4^2 + 9 = 25$.

Поэтому

$$\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\, dx = \int\limits_9^{25} x\sqrt{t}\, \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int\limits_9^{25} \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_9^{25} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_9^{25} = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_9^{25} =$$

$$=\frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(5^{2+\frac{3}{2}}-3^{2+\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(5^3-3^3\right)=\frac{1}{3}(125-27)=\frac{98}{3}.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

Решение. Сделаем замену $t=\ln x$, тогда $dt=d\ln x$; $dt=(\ln x)'\,dx$; $dt=\frac{1}{x}dx$; $dx=x\,dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t=\ln x$; если $x=1$, то $t_{нижн}=\ln 1=0$; если $x=\sqrt{e}$, то $t_{верхн}=\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$. Таким образом, изменению переменной от $x=1$ до $x=\sqrt{e}$ соответствует изменение переменной t от $t_{нижн}=0$ до $t_{верхн}=\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\,dt}{x\sqrt{1-t^2}}=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=$$

$$=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}.$$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$.

Решение. Положим $1-\cos x=t$, тогда $dt=(1-\cos x)'\,dx$; $dt=\sin x\,dx$; $dx=\frac{dt}{\sin x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t=1-\cos x$; если $x=\frac{\pi}{2}$, то $t_{нижн}=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-0=1$; если $x=\pi$, то $t_{верхн}=1-\cos\pi=1-(-1)=2$. Таким образом, изменению переменной *x* от $x=\frac{\pi}{2}$ до *x*=2 соответствует изменение переменной t от $t_{нижн}=1$ до $t_{верхн}=2$. Следовательно,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}=\int\limits_{1}^{2}\frac{2\sin x\frac{dt}{\sin x}}{t^2}=2\int\limits_{1}^{2}\frac{dt}{t^2}=2\int\limits_{1}^{2}t^{-2}dt=2\left.\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^2=2\left.\frac{t^{-1}}{-1}\right|_1^2=$$

$$=-2\left(\frac{1}{2}-1\right)=-2\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Пример 6. Вычислить $\int\limits_0^7\frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$.

Решение. Положим $8-x=t$, тогда $dt=(8-x)'\,dx$; $dt=-1dx$; $dx=-dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t=8-x$; если $x=0$, то $t_{нижн}=8-0=8$; если $x=7$, то $t_{верхн}=8-7=1$. Таким образом, изменению переменной x от $x=0$ до $x=7$ соответствует изменение переменной t от $t_{нижн}=8$ до $t_{верхн}=1$, следовательно,

$$\int\limits_0^7\frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}=\int\limits_8^1-\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}=-\int\limits_8^1 t^{-\frac{2}{3}}dt=-\left.\frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right|_8^1=-\left.\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_8^1=-3\sqrt[3]{t}\Big|_8^1=$$

$$=-3\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{8}\right)=-3(1-2)=3.$$