Несобственные интегралы

Интеграл с бесконечными пределами

Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, где $a<b<\infty$, то полагают

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (2.7)$$

Интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если существует предел правой части равенства (2.7), и ***расходящимся***, если указанный предел не существует.

Аналогично, если $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, где $-\infty<a<b$, то полагают

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (2.8)$$

Наконец, если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$ числовой оси, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx \qquad (2.9)$$

Сходимость или расходимость несобственных интегралов часто устанавливается с помощью следующих признаков сходимости:

интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$; $(a>0)$

а) сходится, если

$$|f(x)| \le \frac{M}{x^m} \text{ и } m > 1; \qquad (2.10)$$

б) расходится, если

$$|f(x)| \ge \frac{M}{x^m} \text{ и } m \le 1, \qquad (2.11)$$

здесь M и $m -$ постоянные.

Пример 1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение. По определению (1.8) имеем

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to 0} \int_1^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} x^{-2} dx = \lim_{b \to \infty} \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^b = \lim_{b \to \infty}\left[-\frac{1}{b} - (-1)\right] =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{b} + \lim_{b \to \infty} 1 = 0 + 1 = 1.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Пример 2. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x}$, $a > 1$.

Решение. По определению (1.8), имеем

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \int_a^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \ln x \Big|_a^b = \lim_{b \to \infty} (\ln b - \ln a) = \infty - \ln a = \infty .$$

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 3. Установить сходимость или расходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx .$$

<u>Решение.</u> Так как $|\cos x| \le 1$, то $\left|\dfrac{\cos x}{x^3}\right| \le \dfrac{1}{x^3}$, т.е. подынтегральная функция удовлетворяет неравенству (1.11) при $m = 3 > 1$ и $M \le 1$. Следовательно, интеграл сходится.

Интегралы от неограниченных функций

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a < x < b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)dx = \infty$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (2.12)$$

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если существует предел в правой части равенства (2.12), и ***расходящимся***, если указанный предел не существует.

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющий бесконечный разрыв в правом конце отрезка $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f(x)dx, \quad \varepsilon > 0. \qquad (2.13)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < c$; $c < x \le b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad \varepsilon > 0. \qquad (2.14)$$

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если оба предела в правой части равенства (2.14) существуют, и ***расходящимся***, если хотя бы один из указанных пределов не существует.

На практике для решения вопроса о сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций часто используются следующие ***признаки сходимости***.

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в одном из концов интегрирования $(a;b)$, например в точке $x=a$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$:

а) сходится, если

$$|f(x)| \le \frac{M}{(x-a)^m} \text{ и } m<1; \qquad (2.15)$$

б) расходится, если

$$|f(x)| \ge \frac{M}{(x-a)^m} \text{ и } m \ge 1, \qquad (2.16)$$

здесь M и $m-$постоянные.

Если же $f(x)$ имеет разрыв во внутренней точке $x=c$ интервала $(a;b)$, то интеграл разбивают на два: от a до c и от c до b и применяют указанные признаки к каждому из полученных интегралов.

Пример 4. $\int\limits_6^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

<u>Решение.</u> Функция $1/\sqrt{x}$ непрерывна при $0<x\le 1$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$.

Поэтому в силу равенства (2.12)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{1}-2\sqrt{\varepsilon}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2 - 2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon} = 2-2\cdot 0 = 2.$$

Значит, интеграл сходится и равен 2.

Пример 5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна при $0 \le x < 1$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$, т.к. $\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$.

Поэтому в силу равенства (2.12) имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon) - \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin 0 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

Пример 6. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Функция $\frac{1}{(x-1)^2}$ непрерывна при $0 \le x < 1$ и $1 < x \le 3$, т.к. $\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$ и $\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$. Значит, в точке $x = 1$ функция имеет бесконечный разрыв. Поэтому в силу равенства (1.15) имеем

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_{1+\varepsilon}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{1-\varepsilon} (x-1)^{-2}\, d(x-1) + \int_{1+\varepsilon}^{3} (x-1)^{-2}\, d(x-1)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{3} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{x-1}\Bigg|_0^{1+\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{x-1}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{-1}{1-\varepsilon-1} - \frac{-1}{0-1}\right] +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{-1}{3-1} - \frac{-1}{1+\varepsilon-1}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{-\varepsilon}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{-1}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{1}{2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} = \infty - \frac{3}{2} + \infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 7. $\int_0^5 \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Функция $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$, т.к. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$. Но для $x>0$ $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| < \frac{1}{\sqrt{x}}$, т.к. $|\cos x| < 1$. Значит, эта функция удовлетворяет неравенству (2.14) при $m = \frac{1}{2} < 1$ и $M = 1$.

Следовательно, интеграл сходится.