

Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту или иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение a является производной по времени t от скорости V , которая также является производной по времени t от перемещения S . Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \quad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию $f(t)$ с независимой переменной t и производной второго порядка функции $f(t)$.

2. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1 порядка.

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных**.

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная C – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких-либо начальных условиях $x = x_0, y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)-французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную

$y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D , существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0 , принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$x dy = -y dx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$$y = \frac{C}{x} \text{ - это общее решение}$$

исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

Определение. Интегральной кривой называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости $ХОУ$.

Определение. Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши (см. [Теорема Коши.](#)) не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной C .

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной C . Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$. Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^C$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при

подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^c \neq 0$.

Далее рассмотрим подробнее приемы и методы, которые используются при решении дифференциальных уравнений различных типов.