## 1. *Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными*

**Определение**. Дифференциальное уравнение называется *уравнением с разделяющимися* переменными, если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y). \tag{1.10}$$

Для уравнения (1.10) теорема Коши о существовании и единственности решения может быть сформирована следующим образом.

**Теорема**. Если функция $f_1(x)$ непрерывна в интервале $(a;b)$, функция $f_2(y)$ и ее производная по y непрерывна в интервале $(c;d)$, то для любых начальных данных $x_0 \in (a;b)$, $y_0 \in (c;d)$ существует, причем единственное, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.10), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Другими словами, при указанных условиях через любую точку прямоугольника $a < x < b$, $c < y < d$ проходит, и при том единственная, интегральная кривая уравнения (1.1).

Если $f_2(y) \neq 0$, то уравнение с разделяющимися переменными (2.10) можно переписать в виде *(разделить переменные)*

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{1.11}$$

**Определение**. Уравнение вида (1.11) называется уравнением с разделяющимися переменными.

**Теорема**. Если существуют интегралы $\int \frac{dy}{f(y)}$ и $\int f_1(x)dx$, то общий интеграл уравнения с разделенными переменными (1.11) задается уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C,$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ – некоторые первообразные соответственно функций – $\frac{1}{f_2(y)}$ и $\frac{1}{f_1(x)}$.

**Доказательство.** Допустим, что функция $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (1.11). Подставляя в (1.11), получим тождество относительно переменной $x$:

$$\frac{\varphi'(x)dx}{f_2(\varphi(x))} = f_1(x)dx.$$

Интегрируя это тождество по $x$, найдем:

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{f_2(\varphi(x))} = \int f_1(x)dx + C$$

или, учитывая, что $y = \varphi(x)$ и $dy = \varphi'(x)dx$, по правилу подстановки в неопределенном интеграле имеем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \tag{1.12}$$

или

$$F_2(y) = F_1(x) + C, \tag{1.13}$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$– некоторые первообразные соответственно функций $\frac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

Итак, любое решение дифференциального уравнения (1.11) удовлетворяет уравнению (1.13). Обратно, если некоторая функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет равенству (1.13), то она удовлетворяет и равенству (1.12), но тогда имеет место все предыдущие равенства, включая и (1.11). Таким образом, равенство (1.13) определяет общий интеграл уравнения (1.11).

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (1.10) можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) разделить переменные;

2) интегрируя почленно полученное уравнение с разделяющимися переменными (1.11), найти его общий интеграл (1.13);

3) выяснить, имеет ли уравнение (1.10) решения, не получающиеся из общего интеграла (1.13);

4) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (если это требуется).

**Пример 2**. Найти частное решение уравнения

$2yy' = 1 - 3x^2$,если $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$.

**Решение**. Заменяем $y'$ на $\frac{dy}{dx}$, получим $2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$,

отсюда $2y\,dy = (1 - 3x^2)dx$.

Интегрируя обе части последнего неравенства, найдем $\int 2y\,dy = \int\left(1-3x^2\right)dx$, или $2\int y\,dy = \int dx - 3\int x^2\,dx$,

или $2\cdot\dfrac{y^2}{2} = x - \dfrac{3x^2}{3} + C$, т.е. $y^2 = x - x^2 + C$.

Подставив начальное значение $x_0 = 1,\ y_0 = 3$, найдем $C$: $9 = 1 - 1 + C$, т.е. $C = 9$.

Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2 = x - x^3 + 9$, или $x^3 + y^2 - x - 9 = 0$.

**Пример 3**. Найти общее решение уравнения

$$\left(x^2y^2 - x^2y\right)dy - xy^2\,dx = 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0.$$

**Решение**. Разделим переменные. Для этого преобразуем данное уравнение, вынося общий множитель слева $x^2$: $x^2\left(y^2 - y\right)dy = xy^2\,dx$.

Разделим правую и левую части уравнения на $x^2y^2$:

$$\frac{x^2}{x^2y^2}\left(y^2 - y\right)dy = \frac{xy^2}{x^2y^2}dx, \text{ или } \frac{y(y-1)}{y^2}dy = \frac{dx}{x},$$

или $\dfrac{y-1}{y}dy = \dfrac{dx}{x}$. Проинтегрируем обе части последнего равенства: $\int\dfrac{y-1}{y}dy = \int\dfrac{dx}{x}, \int\left(1-\dfrac{1}{y}\right)dy = \int\dfrac{dx}{x}$, или $\int dy - \int\dfrac{dy}{y} = \int\dfrac{dx}{x}$, откуда $y - \ln|y| = \ln|x| + C_1$ - общий интеграл данного уравнения.

## *2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка*

**Определение**. Функция $g(x,y)$ называется однородной функцией $\kappa-$го порядка, если при любом $t$ имеет место тождество

$$g(tx,ty) = t^k g(x,y). \tag{1.14}$$

Например, $g(x,y) = 2x^3 - 5xy^2$ - однородная функция третьего порядка, т.к.

$$g(tx,ty) = 2(tx)^3 - 5tx(ty)^2 = 2t^3x^3 - 5t^3xy^2 =$$
$$= t^3\left(2x^3 - 5xy^2\right) = t^3 g(x,y).$$

**Определение**. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка.

Однородное дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = z \cdot x$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

**Пример 4**. Найти решения уравнения

$$\left(x^2 - 2y^2\right)dx + 2xy\,dy = 0.$$

**Решение.** В данном уравнении функция $P(x, y) = x^2 - 2y^2$, $Q(x, y) = 2xy$ - однородные второго порядка, тогда $\left(x^2 - 2y^2\right) = -2xy\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx} = y' = -\dfrac{x^2 - 2y^2}{2xy}$ - однородная нулевого порядка.

Положим $y = z \cdot x$, откуда $y' = z'_x \cdot x + z \cdot x'_x = z'_x \cdot x + z$. Подставим эти выражения в данное уравнение $z'_x \cdot x + z = -\dfrac{x^2 - 2z^2 \cdot x^2}{2x \cdot z \cdot x}$, т.е.

$z'_x \cdot x + z = \dfrac{2z^2 - 1}{2z}$, или $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{2z^2 - 1}{2z} - z$, приведем правую часть к общему знаменателю, получим $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{2z^2 - 1 - 2z^2}{2z}$, или

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = -\frac{1}{2z}.$$

Умножим правую и левую части на $dx$: $dz \cdot x = -\dfrac{1}{2z}dx.$

Умножим правую и левую части на $2z$ и разделим на $x$, получим: $2z\,dz = -\dfrac{dx}{x}$.

Проинтегрируем почленно это уравнение:

$\int 2z\,dz = -\int \dfrac{dx}{x}$, откуда $z^2 = -\ln|x| + \ln|C|$, т.е. $z^2 = -\ln\dfrac{|C|}{|x|}$,или

$\dfrac{C}{x} = e^{z^2}$,откуда $x = c \cdot e^{-z^2}$.

Возвращаясь к прежней функции $y$, находим общий интеграл $x = C \cdot e^{-\frac{y^2}{x^2}}$.

**Пример 5**. Найти частное решение уравнения

$$2xyy' = x^2 + y^2, \text{ если } y = 2 \text{ при } x = 1.$$

**Решение.** Запишем данное уравнение в виде

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}. \tag{1.15}$$

Пусть $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$. Тогда $\varphi(tx, ty) = \dfrac{t^2x^2 + t^2y^2}{2t^2xy} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy} = \varphi(x, y)$, т.е. оно однородное. Положим $y = zx$, откуда $y' = z' \cdot x + z$. Подставляя значение $y$ и $y'$ в уравнение (1.15), имеем $z' \cdot x + z = \dfrac{x^2 + z^2x^2}{2zx^2}$,откуда после сокращения на $x^2$ $z' \cdot x + z = \dfrac{1 + z^2}{2z}$, $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{1 + z^2}{2z} - z$, $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{1 + z^2 - 2z^2}{2z}$, $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{1 - z^2}{2z}$.

Умножим на $dx$ правую и левую части, получим $x\,dz = \dfrac{1 - z^2}{2z}dx.$ Разделим правую и левую части уравнения на $x$ и $\dfrac{1 - z^2}{2z}$. Получаем $\dfrac{2z\,dz}{1 - z^2} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем почленно это уравнение:

$\displaystyle\int \frac{2z\,dz}{1 - z^2} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\int \frac{d(1 - z^2)}{1 - z^2} = \int \frac{dx}{x}$, т.к. $d(1 - z^2) = (1 - z^2)'\,dz = -2z\,dz$.

Получаем: $-\ln\left|1 - z^2\right| = \ln|x| + \ln|C|$, $\ln\left|1 - z^2\right|^{-1} = \ln\left|\dfrac{x}{C}\right|$,откуда $\dfrac{1}{1 - x^2} = \dfrac{x}{C}$, или $x(1 - z^2) = C$.

Возвращаясь к прежней функции $y$, находим общий интеграл $x\left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\right) = C$.

Подставив в найденное решение начальное условие, найдем $1\left(1 - \dfrac{2^2}{1^2}\right) = C$, т.е. $1 - 4 = C$, или $C = -3$.

Итак, искомое частное решение будет
$x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=-3$, или $x^2-y^2+3x=0$.

### 3. *Линейные дифференциальные уравнения первого порядка*

**Определение**. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется *линейным*, если имеет следующий вид:

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x), \qquad (1.16)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные функции от $x$. Приведем теорему Коши для линейных уравнений первого порядка.

**Теорема Коши**. Пусть $(a;b)$ интервал, в котором функция $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывна. Тогда для любых $x_0 \in (a;b)$ и $y_0 \in (-\infty;+\infty)$ задача Коши с начальными значениями $(x_0;y_0)$ имеет единственное решение, т.е. существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (1.16), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Нахождение общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка (1.16) сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделенными переменными с помощью подстановки

$$y = u\cdot v, \qquad (1.17)$$

где $u$ и $v$ – неизвестные функции от $x$. Из (1.17) находим $y' = u'_x v + u v'_x$ или

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}. \qquad (1.18)$$

Подставив значения $y$ и $y'$ в уравнение (1.16), получаем
$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)\cdot u\cdot v = Q(x)$, или

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)\cdot u\right) = Q(x). \qquad (1.19)$$

Так как искомая функция $y$ подстановкой (1.17) представлена в виде произведения двух функций $u$ и $v$, то одну из них, например $u$, мы можем выбрать по нашему усмотрению, кроме $u = 0$. Выберем функцию так, чтобы

$$\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u=0, \qquad (1.20)$$

т.е. в качестве функции возьмем одно из частных решений $u^*$ уравнения (1.20). Решая уравнение (1.20) как уравнение с разделяющимися переменными, найдем отличную от нуля функцию $u^*=e^{-\int P(x)dx}$.

Так как функция $u^*$ является решением уравнения (1.20), то после ее подстановки в уравнение (1.19) получим

$$u^*\frac{dv}{dx}=Q(x),\text{ т.е. } dv=\frac{Q(x)}{u^*(x)}dx. \qquad (1.21)$$

Решив уравнение (1.21) как уравнение с разделенными переменными, в котором $u^*$ известна, найдем функцию $v=v(x,C)$, содержащую произвольную постоянную $C$ и являющуюся общим решение уравнения (1.21).

Заменив в равенстве $y=u\cdot v$ функции $u$ и $v$ найденными значениями, получим решение $y=u^*(x)\cdot v(x,C)$ уравнения (1.16), содержащее вместе с функцией $v$ и произвольную постоянную $C$.

**Пример 6**. Найти общее решение уравнения

$$(1+x^2)y'-xy=2x.$$

**Решение.** Разделив все члены данного уравнения на $(1+x^2)\neq 0$, приведем его к виду (1.16)

$$y'-\frac{xy}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}\quad . \qquad (1.22)$$

Здесь $P(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$, $Q(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Положим $y=u\cdot v$, откуда $y'=u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}$.

Подставим эти значения $y$ и $y'$ в уравнение (1.22):

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-\frac{xuv}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например $v$, и вынесем $v$ за скобку

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}-\frac{x\cdot u}{1+x^2}\right)=\frac{2x}{1+x^2}. \qquad (1.23)$$

Выберем функцию $u \neq 0$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е.

$$\frac{du}{dx} - \frac{xu}{1+x^2} = 0. \tag{1.24}$$

Тогда уравнение (1.23) примет вид

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}. \tag{1.25}$$

Решаем уравнение (1.24) как уравнение с разделяющимися переменными (при $u \neq 0$):

$$\frac{du}{dx} - \frac{xu}{1+x^2} = 0, \text{ т.е. } \frac{du}{u} = \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Интегрируем почленно это уравнение:

$$\int\frac{du}{u} = \int\frac{x\,dx}{1+x^2} \text{ ,или } \int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}.$$

т.к. $d\left(1+x^2\right) = \left(1+x^2\right)'dx = 2x\,dx$, откуда $x\,dx = \frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)$

т.е. $\ln|u| = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|$, откуда

$$u = \sqrt{1+x^2}. \tag{1.26}$$

Подставив значение функции $u$ в уравнение (1.25), найдем

$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}, \text{ т.е. } dv = \frac{2x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интегрируя почленно

$$\int dv = \int\frac{2x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \text{ или } \int dv = \int\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(1+x^2\right), \text{ т.к. } d\left(1+x^2\right) = 2x\,dx.$$

Откуда $v = \dfrac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C$, или $v = \dfrac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$ или

$$v = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + C. \qquad (1.27)$$

Заменив в подстановке $y = u \cdot v$ функции $u$ и $v$ их выражениями из равенств (1.26) и (1.27), получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y = \sqrt{1+x^2}\left(C - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\right), \text{ или } y = C\sqrt{1+x^2} - 2.$$

**Пример 7**. Найти частное решение уравнения

$xy' - y = x^3$, если $y = 1/2$ при $x = 1$.

**Решение.** Разделив все члены данного уравнения на $x \neq 0$, приведем его к виду (1.16)

$$y' - y\frac{1}{x} = x^2. \qquad (1.28)$$

Здесь $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$.

Положим $y = u \cdot v$, откуда $y' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

Подставим эти значения в уравнение (1.28):

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - u \cdot v \cdot \frac{1}{x} = x^2.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например $v$, и вынесем $v$ за скобку

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) = x^2. \qquad (1.29)$$

Выберем функцию $u$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е. чтобы

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0. \qquad (1.30)$$

Тогда уравнение (1.29) примет вид

$$u\frac{dv}{dx} = x^2. \qquad (2.31)$$

Решаем уравнение (1.30) как уравнение с разделяющимися переменными (при $u \neq 0$):

$$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x},\ \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя почленно уравнение

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x},\text{ или }\ln u=\ln x,\text{или } u=x. \qquad (1.32)$$

Подставим это значение в уравнение (1.31), найдем

$$x\frac{dv}{dx}=x^2,\text{ т.е. } dv=x\,dx.$$

Интегрируя почленно $\int dv=\int x\,dx$ или

$$v=\frac{x^2}{2}+C. \qquad (1.33)$$

Заменив в подстановке $y=u\cdot v$ функциями $u$ и $v$ их выражениями из равенств (2.32) и (2.33), получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right),\text{ или } y=\frac{x^3}{2}+Cx. \qquad (1.34)$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным данным $y=\frac{1}{2}$ при $x=1$. Для этого подставим в (1.34) $y=\frac{1}{2}$ и $x=1$, получим $\frac{1}{2}=\frac{1^3}{2}+C\cdot 1$ или $0=C$.

Искомое частное решение данного уравнения $y=\frac{x^3}{2}$.

Рассмотренные выше типы дифференциальных уравнений можно классифицировать в виде таблицы:

| | | |
|---|---|---|
| 1.Уравнения с разделяющимися переменными | $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ | $\int\frac{dy}{f(y)}=\int f_1(x)dx$ |
| 2. Однородные уравнения 1 -го порядка | $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ | $\frac{y}{x}=z(x)=z$, $y=x\cdot z$, $y'=z+x\cdot z'$ |
| 3. Линейные уравнения 1-го порядка | $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$ | $y=u\cdot v$, $y'=u'_x v+uv'_x$ |

| | | |
|---|---|---|
| 4. Уравнения Бернулли | $y' + P(x) \cdot y = Q(x) y^{\alpha}$ | $y = u \cdot v,$<br>$y' = u'_x v + u v'_x$ |