Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Определение. *Дифференциальным уравнением второго порядка* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения второго порядка имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям

$$x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)},$$

если

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \quad .... \quad , \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Определение. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши) [2].

Если функция (n-1) *–й переменных вида* $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *в некоторой области* D (n-1)*- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$*, то какова бы не была точка (*$x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$*) в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$*, определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0*, удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений, решение которых сводится к решению дифференциальных уравнений на порядок ниже. Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка. Для простоты объяснения рассмотрим уравнения второго порядка.

1. *Дифференциальные уравнения, содержащие только n производную и некоторую функцию от x*

Это уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n;$$

Простейший тип таких уравнений второго порядка – это $y'' = f(x)$. Данное уравнение не содержит функцию y в явном виде, ни её первой производной y'.

Уравнение такого типа решается последовательным интегрированием два раза. Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y' = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2.$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' = e^{2x}$ с начальными условиями

$$x_0 = 0;\ y_0 = 1;\ y_0' = -1.$$

Решение.

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

Подставим начальные условия:

$$y_0 = 1: -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$y_0' = -1:\ -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1.$$

Решив систему из двух уравнений с двумя неизвестными, получим

$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}.$

Следовательно, частное решение (решение задачи Коши) имеет вид:

$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x.$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' = \cos 4x.$$

Решение.

$$y' = \int \cos\ 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x + c_1;$$

Получили уравнение первого порядка

$$y' = \frac{1}{4}\ \sin\ 4x + c_1.$$

Откуда

$$y = \int \left(\frac{1}{4}\sin\ 4x + c_1\right)dx = -\frac{1}{16}\cos 4x + c_1 x + c_2\,.$$

Общее решение исходного уравнения (содержит две произвольные постоянные c_1и c_2).

Аналогично решаются и дифференциальные уравнения порядков выше второго, если они имеют такой же вид, например,

$$y''' = f(x); \qquad f^{iv} = f(x).$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''' = 3e^{-2x}.$$

Решение.

$y'' = -\frac{3}{2}e^{-2x} + c_1,$

$y' = \frac{3}{4}e^{-2x} + c_1 x + c_2,$

$y = -\frac{3}{8}e^{-2x} + c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_2 -$

общее решение данного уравнения.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} = \frac{x^2}{2} + 3x.$$

Решение.

$$y''' = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + c_1.$$

$$y'' = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{2} + c_1 x + c_2.$$

$$y' = \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{8} + c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

Окончательно общее решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{40} + c_1 \cdot \frac{x^3}{6} + c_2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Обратите внимание, общее решение дифференциального уравнения третьего порядка содержит три произвольные постоянные (c_1, c_2, c_3), а дифференциального уравнения четвертого порядка – уже четыре (c_1, c_2, c_3, c_4). Допускают понижение порядка и дифференциальные уравнения вида

2. Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка k – 1 включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = p; \quad y^{(k+1)} = p'; \quad \ldots \quad y^{(n)} = p^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$p = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Пример 5. Решить уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

Решение. Положим $y' = p;\quad y'' = p'$ тогда уравнение примет вид

$$p' + \frac{p}{x} = x.$$

Получили линейное уравнение первого порядка относительно функции $p = p(x)$.

Решаем его подстановкой $p = u \cdot v,$ где $u = u(x),\ v = v(x)$; $p' = u' \cdot v + u \cdot v'.$

Получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{x} = x;$$

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + u \cdot v' = x;$$

$$u' + \frac{u}{x} = 0; \qquad \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0; \qquad \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} = 0;$$

$$\ln u + \ln x = 0; \qquad u = \frac{1}{x;}$$

$$u \cdot v' = x; \qquad \frac{1}{x} \cdot v' = x; \qquad v' = x^2; \qquad \frac{dv}{dx} = x^2;$$

$dv = x^2 dx$. Откуда $v = \dfrac{x^3}{3} + c_1$.

Функция

$$p = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right).$$

Исходное уравнение решалось подстановкой $y' = p$. Поэтому

$$y' = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$y = \frac{x^3}{9} + c_1 \ln x + c_2$$

Это и есть общее решение исходного уравнения.

Пример 6. Найти частное решение уравнения $y'' \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2xy'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$.

Решение. Применим подстановку $y' = p$; $y'' = p'$. Получим уравнение

$$p' \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2x \cdot p.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно функции *p*. Разделим переменные:

$$\frac{dp}{dx} \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2x \cdot p; \quad dp \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2x \cdot p\,dx; \quad \frac{dp}{p} = \frac{2x\,dx}{x^2 + 1}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x\,dx}{x^2 + 1}; \qquad \ln p = \ln\left(x^2 + 1\right) + \ln c_1;\ p = c_1 \cdot \left(x^2 + 1\right).$$

Откуда

$$y' = c_1\left(x^2 + 1\right).$$

Используем второе начальное условие $y'(0) = 3$, получим

$$3 = c\ (0 + 1); \quad c_1 = 3.$$

Следовательно,

$$y' = 3 \cdot \left(x^2 + 1\right),$$

а после интегрирования

$$y = x^3 + 3x + c_2.$$

Применим первое начальное условие $y(0) = 1$, получим

$$1 = 0 + 0 + c_2, \qquad c_2 = 1.$$

Искомым частным решением будет

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$.

Решение. Применяем подстановку $p = y'', p' = y'''$, получим уравнение

$$p' = \frac{p}{x}.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно функции р. Разделим переменные:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}, \ \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}, \ln|p| = \ln|x| + \ln C_1, p = C_1 x.$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x.$$

Интегрируя последнее выражение последовательно два раза

$$y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3.$$

Откуда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной *x* кроме значения *x =0*.

3. ***Уравнения, не содержащие явно независимой переменной x***

Это уравнения вида $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ или второго порядка $F(y,\ y',\ y'') = 0$. Это уравнение, не содержащее явно независимую переменную *x*.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных

$$y' = p(y)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0.$$

Для дифференциального уравнения второго порядка получим замену $y' = p(y)$, где $p = p(y) -$ вспомогательная функция.

Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

Подставив $y' = p$ *и* $y'' = p \cdot p'$ в данное уравнение, получим уравнение $F(y, p, p') = 0$ – дифференциальное уравнение первого порядка относительно p как функции от y. В котором под p' понимается производная по переменной y.

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$2y \cdot y'' + y'^2 = 0.$$

Решение. Полагая $y' = p,\ y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$, получим

$$2y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0.$$

это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Приведя его к виду

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}$$

и интегрируя, получим

$$\ln p = -\frac{1}{2}\ \ln y + \ln\ c_1; \ln p = \ln\frac{c_1}{\sqrt{y}},\ \ p = \frac{c_1}{\sqrt{y}}.$$

Так как исходное уравнение решалось с помощью подстановки $p = y'$, получим $y' = \dfrac{c_1}{\sqrt{y}}$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно искомой функции y от x .

$$\sqrt{y} \cdot dy = c_1 \cdot dx.$$

$$\int \sqrt{y}\, dy = \int c_1\, dx; \qquad \frac{2y^{3/2}}{3} = c_1 x + c_2; \qquad y^{3/2} = \frac{3}{2} c_1 \cdot x + \frac{3}{2} c_2 .$$

Но так как c_1 и c_2 – произвольные постоянные, $\left(\dfrac{3}{2} \cdot c_1\right)$ $\left(\dfrac{3}{2} \cdot c_2\right)$ – также произвольные постоянные. Поэтому полученный общий интеграл данного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$y^{3/2} = c_1 \cdot x + c_2,$$

т.е.

$$\sqrt{y^3} = c_1 x + c_2 ,$$

или

$$y = \sqrt[3]{\left(c_1 x + c_2\right)^2}.$$

Пример 9. Найти частное решение уравнения

$$y'' - y'^2 + y'\left(y - 1\right) = 0$$

при начальных условиях $y(0) = 2; \quad y'(0) = 2.$

Решение. Применим подстановку $y' = p;$ Тогда

$$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Получим уравнение первого порядка:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 + p \cdot (y-1) = 0.$$

Разделив уравнение на $p \neq 0$, получим

$$\frac{dp}{dy} - p = 1 - y.$$

Это линейное уравнение первого порядка относительно функции p от переменной y.

Решаем его подстановкой

$$p = u \cdot v, \quad \text{где} \quad u = u(y); \quad v = v(y).$$

Дифференцируя функцию p по переменной y, получим

$$p' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Подставляя p в исходное уравнение имеем

$$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v = 1 - y; \; v \cdot (u' - u) + u \cdot v' = 1 - y.$$

Приравнивая выражение $u' - u$ к нулю и решая его относительно u, получим

$$\frac{du}{dy} = u; \quad \frac{du}{u} = dy; \quad \int \frac{du}{u} = \int dy.$$

Интегрируя последнее, имеем

$$\ln u = y; \quad u = e^y.$$

Подставим найденное значение u в исходное уравнение $u \cdot v' = 1 - y$, получим

$$e^y \cdot v' = 1 - y,$$
$$v' = \frac{1-y}{e^y} = (1-y) \cdot e^{-y}, \; \frac{dv}{dy} = (1-y) \cdot e^{-y},$$
$$dv = (1-y) \cdot e^{-y} dy,$$
$$\int dv = \int (1-y) \cdot e^{-y} dy, \; v = \int (1-y) \cdot e^{-y} dy.$$

Интеграл справа берем по частям с помощью подстановки

$$1 - y = t; \; dt = -dy; \; e^{-y} dy = ds; \; s = \int e^{-y} dy = -e^{-y}.$$

Тогда

$$\int(1-y)\cdot e^{-y}dy=-(1-y)\cdot e^{-y}-\int e^{-y}dy=-(1-y)\cdot e^{-y}+e^{-y}+c_1.$$

Таким образом,

$$v=e^{-y}-(1-y)\cdot e^{-y}+c_1.$$

Тогда функция p равна $p=u\cdot v,$ где $u=e^{y}$, а $v=e^{-y}-(1-y)\cdot e^{-y}+c_1$

Таким образом, $p=y+c_1\cdot e^{y}$, или $y'=y+c_1\cdot e^{y}$.

Найдем значение c_1 из начальных условий

$$y(0)=2,\quad y'(0)=2.$$

$2=2+c_1\cdot e^2;\qquad c_1\cdot e^2=0;\qquad c_1=0.$

Таким образом $y'=y;$ $\dfrac{dy}{dx}=y;$ $dy=y\cdot dx;$ $\dfrac{dy}{y}=dx.$

Интегрируя последнее равенство получаем

$\int\dfrac{dy}{y}=\int dx;\qquad \ln y=x+c_2,\quad y=e^{x+c_2}=e^{x}\cdot e^{c_2}=c\cdot e^{x}.$

Заметим, что константа e^{c_2} может быть обозначена как c, т. к. c_2 – произвольная константа , e^{c_2} – тоже произвольная постоянная. Таким образом,

$$y=c\cdot e^{x}.$$

Найдем c из первого начального условия $y(0)=2$:

$2=c\cdot e^{0};\qquad c=2.$

Искомое частное решение имеет вид $y=2\cdot e^{x}$.

Пример 10. Найти общее решение уравнения

$$yy''-(y')^2-4yy'=0.$$

Решение. Замена переменной: $p=y';\qquad y''=\dfrac{dp}{dy}p;$

$yp\dfrac{dp}{dy}-p^2-4yp=0;\qquad p\left(y\dfrac{dp}{dy}-p-4y\right)=0;$

Приравнивая выражение в скобках и решив его относительно переменной u получим

$$y\frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \qquad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \dfrac{p}{y}$.

$$u + \frac{du}{dy}y = 4 + u; \qquad du = 4\frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4\int \frac{dy}{y}; \qquad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1; \qquad u = 4\ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1 y|.$$

С учетом того, что $p = \dfrac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1 y|; \qquad \int \frac{dy}{4y\ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4}\int \frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln\left|\ln|C_1 y|\right| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln\left|\ln|C_1 y|\right| = 4x + C$.

Если $p = 0$ то $y' = 0$ или $y = C$.

Таким образом, получили два общих решения.