Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное уравнение отличается от однородного уравнения функцией в правой части. Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \tag{1.47}$$

а соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,$$

которое, как известно, решается с помощью характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Сформулируем теорему о структуре общего решения неоднородного уравнения (1.47).

Теорема (о структуре общего решения). Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пусть y – общее решение уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$, $y_ч$ −какое-либо частное решение неоднородного уравнения, y_0 −общее решение соответствующего однородного уравнения.

Тогда

$$y = y_0 + y_ч .$$

Таким образом, основная задача при решении неоднородного линейного дифференциальные уравнения второго порядка состоит в нахождении какого-либо частного решения.

На практике удобно применять метод *вариации произвольных постоянных.*

1. *Метод вариации произвольных постоянных.*

При реализации этого метода сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде [5]:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2;$$

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2;$$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Решение. Решаем линейное однородное уравнение $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется по формуле $y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$. В данном случае $\alpha = 0; \quad \beta = 1$. Откуда

$$y = A\cos x + B\sin x;$$

Заменяя коэффициенты A и B функциями от x, ищем решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$$

Для определения неопределённых коэффициентов $A(x)$ и $B(x)$ составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0; \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x}; \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x; \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x). \end{cases}$$

Из соотношения $A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ найдем функцию *A(x).*

$$A(x) = \int\left(2\sin^2 x\cos x - x\sin x\right)dx = 2\int\sin^2 x\cos xdx - \int x\sin xdx =$$

$$\frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin xdx = \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \sin xdx; \\ du = dx; & v = -\cos x \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int\cos xdx = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Аналогично вычисляем *B(x).*

$$B(x) = \int x\cos xdx - 2\int\cos^2 x\sin xdx = \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x; \end{Bmatrix} =$$

$$= x\sin x - \int\sin xdx + \frac{2}{3}\cos^3 x = \frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1\cos x + \frac{2}{3}\sin x\cos^3 x +$$

$$+ x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2\sin x = \frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) +$$

$$+ x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Окончательно получим решение в виде:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим ещё один из методов нахождения частного решения неоднородного уравнения, когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид. К таким функциям $f(x)$ относятся следующие функции: экспонента $e^{\alpha x}$ $(\alpha = \text{const})$; многочлены n-й степени относительно переменной x $P_n(x)$; тригонометрические функции

$\cos nx$; $\sin nx$, а также их произведения.

2. *Метод неопределенных коэффициентов*

Этот метод иначе называется методом подбора частного решения $y_ч$ − уравнения (1.47) по виду правой части $f(x)$ [6].

Пусть правая часть $f(x)$ *уравнения* (1.47) *имеет вид* $f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, т. е. представляет собой произведение экспоненты на многочлен, где $\alpha-\text{const}$; $P_n(x)-$ многочлен n-й относительно x. В этом случае уравнение примет вид

$$y''+p\cdot y'+q\cdot y=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}. \tag{1.48}$$

Тогда возможны следующие варианты.

1)Число α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2+pk+q=0.$$

Тогда частное решение нужно искать в виде $y_ч=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)-$многочлен той же степени, что и данный многочлен $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

2)Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с одним корнем характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_ч=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x$.

3)Число α есть двукратный корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с двумя равными корнями характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_ч=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x^2$. Неизвестные (неопределенные) коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ находим из условия, что функция $y_ч$ является решением уравнения (11.48), т. е. удовлетворяет этому уравнению.

Пусть правая часть $f(x)$ *уравнения* (1.47) имеет вид

$$f(x)=M\cdot\cos\beta x+N\cdot\sin\beta x,$$

где M *и* N – постоянные числа. Тогда вид частного решения $y_ч$ определяется следующим образом.

а) Если число βi не есть корень характеристического уравнения , то частное решение $y_ч$ имеет вид

$$y_ч = A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x,$$

где A и B – постоянные неопределенные коэффициенты.

б) Если число βi есть корень характеристического уравнения, то

$$y_ч = \left(A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x \right) \cdot x.$$

Сделаем важное замечание. Даже тогда, когда в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos \beta x$ или только $\sin \beta x,$ следует искать частное решение в том виде, в каком оно было указано, т. е. с синусом и косинусом. Иными словами, из того, что правая часть не содержит $\cos \beta x$ или $\sin \beta x,$ не следует, что частное решение уравнения не содержит этих функций.

На основании вышеизложенного можно составить таблицу, которой удобно пользоваться при решении дифференциальных уравнений:

<table>
<tr><td colspan="4">Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$.
Заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1. $k^2 + pk + q = 0$ (*).
Найти $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны</td><td>$k_2 \neq k_1$</td><td>$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Случай 2. Корни характеристического уравнения действительны и равны</td><td>$k_1 = k_2 = k$</td><td>$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Случай 3. Корни характеристического уравнения комплексные:</td><td>$p^2 - 4q < 0$ Введем $i^2 = -1$.Тогда $p^2 - 4q = i^2\left(4q - p^2\right)$ или $k_{1,2} = a \pm bi$</td><td>$y = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x), y = y_ч + y_о$,
$y_о$ – решение однородного уравнения, $y_ч$ – частное решение неоднородного .</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Случай 1.
$f(x) = P_n(x) \cdot e^{ax}$</td><td colspan="2">$a \neq k_1, a \neq k_2$</td><td>$y_ч = Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a = k_2 \neq k_1$</td><td>$y_ч = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a = k_2 = k_1$</td><td>$y_ч = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Случай 2.
$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) +$
$+Q_n(x))$</td><td colspan="3">$z=a+bi$ не является корнем характеристического уравнения (*)
$y_ч = e^{ax}\left(S_n(x)\cos bx + T_n(x)\sin bx\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$z=a+bi$ является корнем характеристического уравнения (*)</td></tr>
</table>

	$y_ч = xe^{ax}\left(S_n(x)\cos bx + T_n(x)\sin bx\right)$

Рассмотрим примеры, на которых покажем не только принцип применения метода, но и *порядок оформления* решения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + 7k + 12 = 0.$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}.$$

$$k_1 = -3; \qquad k_2 = -4.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-4x}.$$

3) Запишем формулу, по которой следует искать частное решение $y_ч$ данного уравнения. Для этого сравним правую часть уравнения $f(x) = 24x^2 + 16x - 15$ с общим видом правой части:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x).$$

$24x^2 + 16x - 15$ – многочлен второй степени с коэффициентами 24; 16; –15.

В данном случае показательная функция $e^{\alpha x} = 1$, т. е. $\alpha = 0$. Так как $\alpha = 0$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения $(k_1 = -3;\ k_2 = -4)$, частное решение нужно искать в виде $y_ч = Ax^2 + Bx + C.$

$Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C$ – многочлен второй степени $(n = 2)$, неизвестные (неопределенные) коэффициенты *A, B, C* этого многочлена нужно найти, подставив выражения $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ в данное уравнение.

4) Запишем $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 12 & y_ч = Ax^2 + Bx + C; \\ 7 & y_ч' = 2Ax + B; \\ 1 & y_ч'' = 2A. \end{array}$$

Слева указаны коэффициенты 12, 7, 1, на которые следует умножить $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$, чтобы получить левую часть уравнения $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$ В левой части получим многочлен второй степени с неопределенными коэффициентами, который должен быть равен данному многочлену второй степени в правой части. Два многочлена будут равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях *x*. Запишем столбиком полученные уравнения:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^2 & 12A = 24; \\ x^1 & 14A + 12B = 16; \\ x^0 & 2A + 7B + 12C = -15. \end{array}\right\}$$

Имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными коэффициентами *A, B, C*.

Решив ее, найдем $A = 2, \quad B = -1, \quad C = -1$.

Частное решение: $y_ч = 2x^2 - x - 1.$

5) Общее решение данного уравнения:

$$y = y_0 + y_ч,$$

или

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x} + 2x^2 - x - 1.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + k - 2 = 0, \qquad k_1 = -2; \quad k_2 = 1.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

3)Сравним правую часть данного дифференциального уравнения $f(x) = 3e^x$ с $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$. Отметим, что $\alpha = 1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения; многочлен – число 3 – нулевой степени, т. е. $n = 0$. Поэтому частное решение $y_ч$ следует искать в виде $y_ч = A \cdot e^x \cdot x.$

4) Запишем

$$\begin{array}{r|l} -2 & y_ч = A\cdot e^x\cdot x, \\ 1 & y_ч' = A\cdot e^x + A\cdot e^x\cdot x, \\ 1 & y_ч'' = A\cdot e^x + A\cdot e^x + A\cdot e^x\cdot x. \end{array}$$

Подставив выражения $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ с указанными коэффициентами в данное дифференциальное уравнение, получим

$$2A\cdot e^x + A\cdot e^x\cdot x + A\cdot e^x + A\cdot e^x\cdot x - 2A\cdot e^x\cdot x = 3e^x,$$

или

$$3A\cdot e^x = 3e^x,$$

откуда $A = 1$. Частное решение: $y_ч = x\cdot e^x$.

5) Искомое общее решение данного уравнения:

$$y = C_1\cdot e^{-2x} + C_2\cdot e^x + x\cdot e^x.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - y = x\cdot e^{-x}$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 1 = 0; \qquad k_1 = -1; \qquad k_2 = 1.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^x.$$

3)Сравним правую часть данного уравнения $f(x) = x\cdot e^{-x}$ с $f(x) = e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$. Отмечаем, что $\alpha = -1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения и многочлен x степени $n = 1$. Поэтому частное решение следует искать в виде $y_ч = (Ax + B)\cdot x\cdot e^{-x}$.

4) Так как требуется найти $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$, удобнее записать $y_ч$ в виде $y_ч = \left(Ax^2 + Bx\right)\cdot e^{-x}$.

Запишем $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} -1 & y_ч = \left(Ax^2 + Bx\right)\cdot e^{-x}, \\ 0 & y_ч' = (2Ax + B)\cdot e^{-x} - \left(Ax^2 + Bx\right)\cdot e^{-x}, \\ 1 & y_ч'' = 2A\cdot e^{-x} - (2Ax + B)\cdot e^{-x} - (2Ax + B)\cdot e^{-x} + \left(Ax^2 + Bx\right)\cdot e^{-x}. \end{array}$$

Подставим выражения $y_ч,\ y_ч$ с указанными коэффициентами в данное уравнение. Получим равенство

$$2A\cdot e^{-x} - 2(2Ax + B)\cdot e^{-x} + \left(Ax^2 + Bx\right)\cdot e^{-x} - \left(Ax^2 + Bx\right)\cdot e^{-x} = x\cdot e^{-x}.$$

Разделим уравнение на $e^{-x} \neq 0$ и упростим:

$$2A - 2(2Ax + B) = x,$$

$$2A - 4Ax - 2B = x.$$

$$\begin{array}{c|c} x^1 & -4A = 1; \\ x^0 & 2A - 2B = 0, \end{array}\Bigg\} \qquad \begin{cases} A = -1/4; \\ B = -1/4. \end{cases}$$

Частное решение: $y_ч = -\dfrac{1}{4}\left(x^2 + x\right)\cdot e^{-x}.$

5)Общее решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^{x} - \frac{1}{4}\left(x^2 + x\right)\cdot e^{-x}.$$

Пример 5. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = 4\sin\ 3x + 2\cos\ 3x.$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 + 3k + 2 = 0;$

$k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2}.$

$k_1 = -1; \qquad k_2 = -2.$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^{-2x}.$$

3) Сравним правую часть уравнения $f(x) = 4\sin 3x + 2\cos 3x$ с $f(x) = M\cdot\cos\beta x + N\cdot\sin\beta x$. Здесь $M = 2,\quad N = 4;\ \alpha = 0,\quad \beta = 3.$ Так как числа $\pm\beta i = \pm 3i$ не являются корнями характеристического

уравнения, частное решение следует искать в виде $y_ч = A\cdot\cos 3x + B\cdot\sin\ 3x.$

4) Найдем $y_ч^{'}$, $y_ч^{''}$ и запишем столбиком

$$\begin{array}{c|l} 2 & y_ч = A\cdot\cos\ 3x + B\cdot\sin 3x, \\ 3 & y_ч^{'} = -3A\cdot\sin 3x + 3B\cdot\cos 3x, \\ 1 & y_ч^{''} = -9A\cdot\cos 3x - 9B\cdot\sin\ 3x. \end{array}$$

Подставив эти выражения в данное дифференциальное уравнение, получим

$-9A\cdot\cos\ x - 9B\cdot\sin\ 3x - 9A\cdot\sin\ 3x + 9B\cdot\cos 3x + 2A\cdot\cos\ 3x + 2B\cdot\sin\ 3x =$
$= 4\sin\ 3x + 2\cos 3x$ или

$\sin\ 3x\cdot(-7B - 9A) + \cos\ 3x\cdot(-7A + 9B) = 4\sin\ 3x + 2\cos\ 3x.$

Приравниваем коэффициенты при $\sin\ 3x$ и $\cos\ 3x$ в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{array}{r|l} \sin\ 3x & \left.\begin{array}{l} -7B - 9A = 4; \\ -7A + 9B = 2, \end{array}\right\} \\ \cos\ 3x & \end{array}$$

$$A = -\frac{5}{13}; \qquad B = -\frac{1}{13}.$$

Частное решение: $y_ч = -\dfrac{5}{13}\cos\ 3x - \dfrac{1}{13}\sin 3x.$

5) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^{-2x} - \frac{5}{13}\text{cox}\ 3x - \frac{1}{13}\sin\ 3x.$$

Пример 6. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x.$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 + 2k + 5 = 0;$

$k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i\ (a = -1;\quad b = 2).$

2)По формуле (11.16) общим решением будет

$$y_0 = e^{-x}\cdot(C_1\cdot\cos\ 2x + C_2\cdot\sin\ 2x).$$

3)Сравним правую часть уравнения $f(x)=2\cos x$ с $f(x)=M\cdot\cos\ \beta x+N\cdot\sin\ \beta x.$

Здесь $M=2,\quad N=0;\ \beta=1.$ Числа $\pm\beta i=\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Частное решение следует искать в виде

$$y_ч=A\cdot\cos\ x+B\cdot\sin\ x.$$

4) Запишем

$$\begin{array}{c|l} 5 & y_ч=A\cos\ x+B\sin\ x, \\ 2 & y_ч'=-A\sin x+B\cos\ x, \\ 1 & y_ч''=-A\cos\ x-B\sin\ x. \end{array}$$

Подставив $y_ч,\ y_ч',\ y_ч''$ в уравнение, получим

$-A\cos\ x-B\sin x-2A\sin x+2B\cos\ x+5A\cos\ x+5B\sin\ x=2\cos\ x,$

или $\sin x\cdot(4B-2A)+\cos x\cdot(4A+2B)=2\cos x.$

$$\begin{array}{c|l} \sin\ x & 4B-2A=0; \\ \cos\ x & 4A+2B=2. \end{array}\Big\}$$

$$A=\frac{2}{5};\quad B=\frac{1}{5}.$$

Частное решение: $y_ч=\dfrac{2}{5}\cos\ x+\dfrac{1}{5}\sin\ x.$

5) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y=e^{-x}(C_1\cos\ 2x+C_2\sin\ 2x)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin\ x.$$