Применение обыкновенных дифференциальных уравнений к составлению простейших математических моделей.

Рассмотрим часто применяющейся при составлении модели некоторых процессов математический аппарат – составление дифференциального уравнения.

Процесс составления дифференциального уравнения по условию задачи (геометрической, физической или технической) состоит в том, что мы выражаем на математическом языке *связь между переменными величинами и их бесконечно малыми приращениями*. Иногда дифференциальное уравнение получается без рассмотрения приращений – за счет того, что они учтены заранее. Так, представляя скорость выражением $v = \frac{ds}{dt}$, мы не используем приращений Δs, Δt, но фактически учтены, так как

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

При составлении дифференциальных уравнений первого порядка бесконечно малые приращения сразу же заменяются соответствующими дифференциалами. Погрешность, совершаемая при этом, автоматически устраняется при переходе к пределу. Вообще всякую бесконечно малую величину можно заменить на эквивалентную ей, например, бесконечно малую дугу соответствующей хордой или наоборот.

Общих правил для составления дифференциальных уравнений дать нельзя. Как и при составлении алгебраических уравнений, здесь часто требуется определённая изобретательность и глубокое понимание не только описываемого процесса, но и обладание математическими знаниями, позволяющими это явление представить математическим языком.

Покажем на примерах как из некоторой практической задачи может получиться математическая модель, решение которой сводится к решению дифференциального уравнения [8].

1. *Задача о растекании капли вязкой жидкости.*

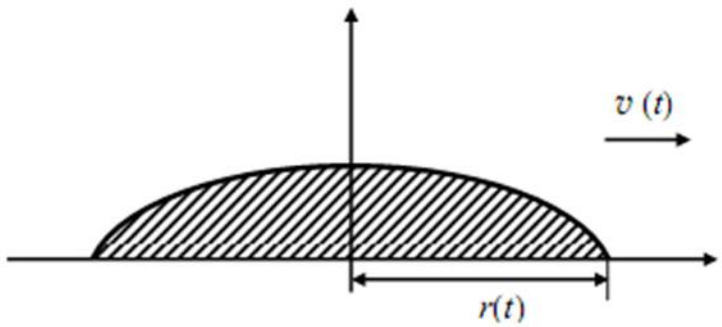

Рис. 2.1. К задаче о растекании вязкой капли

На гладкую горизонтальную поверхность нанесена симметричная капля вязкой жидкости. На рис. 2.1 представлено вертикальное сечение капли, проходящее через ось ее симметрии. Пятно контакта капли с поверхностью представляет собой круг радиуса *r(t),* где *t* – время. Из гидродинамики известно, что скорость растекания капли обратно пропорциональна девятой степени радиуса пятна контакта. В начальный момент времени капля имела радиус r_0 = 1см и скорость растекания v_0 = 0,1см/с. Найти, каков будет радиус растекания капли через 10 минут после начала процесса?

Решение. По условию задачи скорость растекания капли *v*(*t*) пропорциональна радиусу растекания *r*(*t*) в минус девятой степени, т.е.

$$v(t) = k\cdot r^{9},$$

где *k* – коэффициент пропорциональности.

Скорость движения, как известно, представляет собой производную но времени от перемещения тела, т.е. $v = \dfrac{dr}{dt}$. Тогда радиус растекания капли удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка (см. §1)

$$\frac{dr}{dt} = k \cdot r^{-9}$$

с начальными условиями

$$r(0) = r_0,\ r'(0) = r'_0.$$

Разделяя в уравнении переменные, получим

$$r^9 dr = kdt,\ \int r^9 dr = \int kdt,\ \frac{r^{10}}{10} dr = kt + \frac{C}{10},\ r = (10kt + C)^{0,1}.$$

В начальный момент времени имеем $t = 0$, $r = r_0$, $r'(0) = r'_0$. Тогда

$$r_0 = C^{0,1},\ v_0 = \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = k(10kt + C)^{-0,9} = kC^{-0,9}.$$

Отсюда находим постоянную интегрирования C и коэффициент пропорциональности k.

$$C = r_0^{\ 10}, k = v_0 C^{0,9} = v_0 r_0^{\ 0,9}.$$

Теперь с учетом найденных значений C и $к$ можно написать закон растекания капли вязкой жидкости по гладкой горизонтальной поверхности:

$$r = \left(10 v_0 r_0^9 t + r_0^{10}\right)^{0,1} = r_0 \left(\frac{t}{t_0} + 1\right)^{0,1}, \qquad (2.1)$$

где $t_0 = \dfrac{r_0}{10 v_0}$ характерное время процесса растекания.

Подставляя в закон растекания (2.1) заданные начальные условия r_0 = 1 см, v_0 = 0,1 см/с, получим

$$r = (t + 1)^{0,1}(\text{см})$$

В момент времени t = 10 мин. = 600 с радиус растекания капли составит

$$r = (600 + 1)^{0,1} \approx 1{,}9(\text{см}).$$

Таким образом, радиус пятна контакта капли жидкости с подложкой за время растекания увеличится почти в два раза по сравнению со своим начальным значением.

Замечание. Отметим, что согласно полученному в задаче закону растекания, радиус капли неограниченно увеличивается со временем, т.е. в задаче имеет место случай, так называемого, полного смачивания. Для случая частичного смачивания, характерного, в частности, для многих углеводородных жидкостей, капля со временем стремится занять положение с конечным радиусом пятна смачивания.

2. Задача о мальчике Дениске из рассказа Виктора Драгунского «Тайное становится явным»

Дениска выкинул из окна 15-го этажа манную кашу, которую мама сварила ему на завтрак. Известно, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости полета каши. Через четыре секунды каша пролетела мимо окна 8-го этажа. Выясните, через сколько секунд каша попадет на новую шляпку проходившего мимо гражданина, если высота каждого этажа дома, где живет мальчик Дениска, равна 2,5 метрам?

Решение задачи о мальчике Дениске.

Пусть $x(t)$ – перемещение каши по направлению к земле за время t после ее вылета из окна, а m – масса каши. Используя второй закон Ньютона, запишем уравнение, описывающее движение каши:

$$mx'' = -kx' + mg ,$$

где κ– коэффициент пропорциональности, g–ускорение силы тяжести, а

$$x' = \frac{dx}{dt}, x'' = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Перепишем уравнение в виде

$$x'' + \lambda x' = g , \ \lambda = \frac{k}{m}.$$

Полученное уравнение – неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Правая часть уравнения представляет собой постоянную, т.е. многочлен нулевой степени. Решая уравнение уже знакомым методом (см. §1), получим его общее решение:

$$x = C_1 + C_2 e^{-\lambda t} + \frac{g}{\lambda} t.$$

В начальный момент времени перемещение и вертикальная составляющая скорости равны нулю:

$$x(0) = 0, \ x'(0) = 0.$$

поэтому

$$C_1 + C_2 = 0, \ -\lambda C_2 + \frac{g}{\lambda} t = 0.$$

Откуда

$$C_1 = -C_2 = -\frac{g}{\lambda^2}.$$

и закон движения выброшенной каши, т.е. зависимость её перемещения x от времени t, имеет вид

$$x = -\frac{g}{\lambda^2}\left(1 - \lambda t - e^{-\lambda t}\right).$$

Для нахождения коэффициента λ, имеем условие:

$$x = 7 \cdot 2{,}5 \text{ (м) при } t = 4 \text{ (с)}$$

(ведь до окна 8-го этажа каше пришлось преодолеть семь этажей по 2,5 метра). Получаем тогда из закона движения выброшенной каши алгебраическое уравнение:

$$17{,}5 = -\frac{10}{\lambda^2}\left(1 - 4\lambda - e^{-4\lambda}\right),$$

которое, однако, невозможно решить аналитически. А вот приближенное решение этого уравнения найти не сложно!

Действительно, заметим, что величина $e^{-4\lambda}$ мала при $\lambda > 1$, а величина ускорения g силы тяжести приблизительно 10(м/с^2). Решая это квадратное уравнение, получим $\lambda = 2$ (1/с). (Объясните самостоятельно, почему второй корень квадратного уравнения оказался лишним!)

Окончательно можно записать закон движения каши:

$$x = -\frac{g}{4}\left(1 - 2t - e^{-2t}\right).$$

Теперь можно выяснить, когда каша долетит до шляпы проходившего мимо гражданина. Для этого в полученный выше закон надо подставить значение $x = 15 \cdot 2{,}5$ (м), $g = 10$ (м/с^2) и опять отбросить малый экспоненциальный член e^{-2t}:

$$37{,}5 = -\frac{10}{4}(1 - 2t),\ t \approx 8(\text{с}).$$

(Кстати, легко проверить, что при найденном значении времени t отброшенный нами в правой части равенства член e^{-2t} имеет величину

$e^{-2t} \approx e^{-16} \approx 0{,}00000011$, т.е. действительно мал по сравнению с оставленным членом $1 - 2t$)

Таким образом, манная каша, выброшенная мальчиком Дениской, будет лететь до земли примерно 8 секунд. Отметим, что за это время, проходивший мимо гражданин вполне может удалиться от падающей каши на безопасное расстояние! А Дениска тем самым не смог бы убедиться в достоверности того, что всё тайное становится явным.

3. Математическая модель подвески автомобиля.

Для составления данной модели необходимо рассмотреть модель Фохта. Она используется в механике для описания колебательного процесса подвески автомобиля [9].

Пусть $y(t)$ перемещение подвески, тогда $-\kappa y(t)$ характеризует жесткость пружины, $-\lambda \upsilon = \lambda y'(t)$ - вязкое трение в амортизаторе, m – масса машины, a – её ускорение, используя законы Ньютона, можно получить уравнение, описывающее перемещение подвески автомобиля [3]:

$$y'' + \frac{\lambda}{m} y' + \frac{\kappa}{m} y = 0 \text{ или } y'' + py' + qy = 0. \qquad (2.2)$$

Решив это уравнение, получим три возможных случая, которые соответствует апериодическому процессу, жесткой подвеске и регулируемой.

Напишем соответствующее характеристичное уравнение

$$k^2 + pk + q = 0.$$

и найдем его корни:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

1) Пусть $\frac{p^2}{4} > q$. Тогда корни k_1 и k_2 – действительные отрицательные числа. Следовательно, в этом случае общее решение выражается через показательные функции:

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t},$$

где $k_1 < 0, k_2 < 0$.

Из этой формулы следует, что отклонение y при любых начальных условиях асимптотически стремится к нулю, если $t \to \infty$. В данном случае колебаний не будет, так как силы вязкого сопротивления амортизатора велики по сравнению с коэффициентом жесткости рессоры k.

2) Пусть $\frac{p^2}{4} = q$. Тогда корни k_1 и k_2 равны между собой. Если $k_1 = k_2 = k$, то $p^2 - 4q = 0$, т.е. $k = -\frac{p}{2}$ или $2k + p = 0$.

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{\frac{p}{2}t}\left(C_1 + C_2 t\right).$$

Здесь отклонение также стремится к нулю при $t \to \infty$, но не так быстро, как в предыдущем случае (благодаря наличию сомножителя $C_1 + C_2 t$. Данный случай является редким, переходным от случая колебаний 1) к случаю – 3).

3) Пусть $p = 0$, т. е. – отсутствует сила вязкого трения в амортизаторе. Что соответствует выходу из строя амортизатора. Уравнение тогда примет вид

$$y''+qy=0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + q = 0$, а его корни равны $k_1 = bi$ и $k_2 = -bi$ $\left(b = \sqrt{q}\right)$.

Общее решение:

$$y = C_1 \cos bt + C_2 \sin bt.$$

В последней формуле произвольные постоянные C_1 и C_2 заменим другими. Именно, введем постоянные A и связанные с C_1 и C_2 соотношениями

$$C_1 = A\sin\varphi_0, C_2 = A\cos\varphi_0.$$

A и φ_0 через C_1 и C_2 определяются так:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение, будем иметь

$$y = A\sin\varphi_0 \cos bt + A\cos\varphi_0 \sin bt$$

или

$$y = A\sin\left(bt + \varphi_0\right)$$

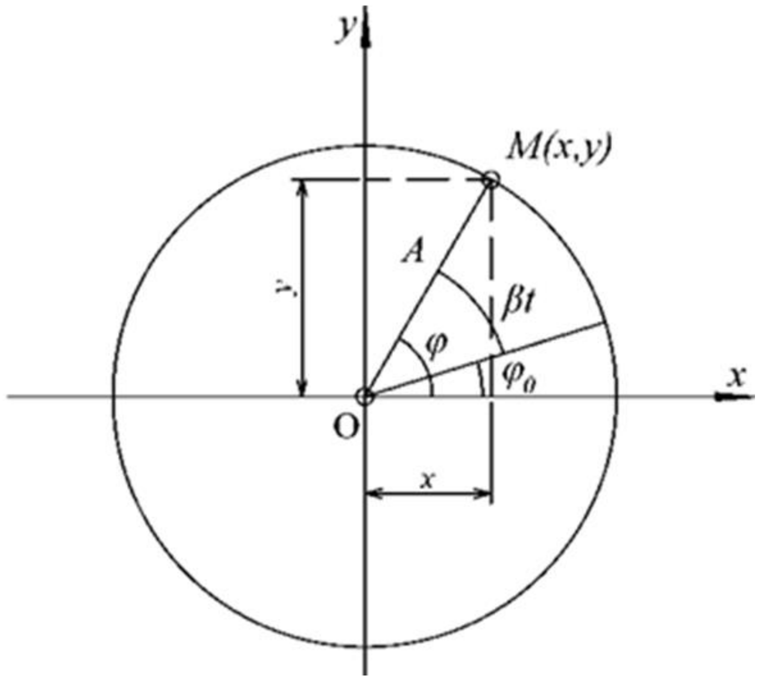

Рис. 2.2. Векторное изображение гармонических колебаний

Колебания в этом случае называются *гармоническими.* Интегральными кривыми являются синусоиды. Промежуток времени T, за который аргумент синуса изменяется на 2π, называется *периодом* колебаний; в данном случае $T = \dfrac{2\pi}{b}$. *Частотой* колебания называется число колебаний за время 2π; в данном случае частота равна b; A – величина наибольшего отклонения от положения равновесия – называется *амплитудой* колебания; φ_0 называется *начальной фазой.*

В электротехнических и других дисциплинах широко используют комплексное и векторное изображения гармонических колебаний.

Рассмотрим в комплексной плоскости xOy радиус-вектор $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t)$ постоянной длины $|\boldsymbol{A}| = A = \text{const}$.

Конец вектора $\boldsymbol{A}$ при изменении параметра t (в данном случае t – время) описывает окружность радиуса A с центром в начале координат (рис. 2.2). Пусть угол ψ, образованный вектором $\boldsymbol{A}$ и осью Ox, выражается так: $\psi = bt + \varphi_0$. Величина b называется *угловой скоростью вращения вектора A.* Проекции вектора $\boldsymbol{A}$ на оси *Oy и Ox* будут

$$y = A\sin\left(\beta t + \varphi_0\right),\ y = A\cos\left(\beta t + \varphi_0\right). \qquad (2.3)$$

Выражения (2.3) суть решения уравнения (2.2).
Рассмотрим комплексную величину

$$z = x + iy = A\cos(\beta t + \varphi_0) + iA\sin(\beta t + \varphi_0),$$

или

$$z = A(\cos(\beta t + \varphi_0) + i\sin(\beta t + \varphi_0)). \qquad (2.4)$$

Комплексная величина z изображается вектором $\boldsymbol{A}$. Таким образом, решения уравнения гармонических колебаний (2.2) можно рассматривать как *проекции вектора* $\boldsymbol{A}$ *на оси Оу и Ох, вращающегося с угловой скоростью* β *при начальной фазе* φ_0.

Пользуясь формулой Эйлера (см. § 3), выражение (2.4) можно переписать так:

$$z = Ae^{i(\beta t + \varphi_0)}. \qquad (2.5)$$

Мнимая и действительная части выражения (2.5) являются решениями уравнения (2.2). Выражение (2.5) называется *комплексным решением* уравнения (2.2). Перепишем выражение (2.5) так:

$$z = Ae^{i\varphi_0}e^{i\beta t}. \qquad (2.6)$$

Выражение $z = Ae^{i\varphi_0}$ называют комплексной амплитудой. Обозначим ее через A^*. Тогда комплексное решение (2.6) перепишется так:

$$z = A^* e^{i\beta t} \qquad (2.7)$$

4) Пусть $p \neq 0$ и $\frac{p^2}{4} < q$.

В этом случае корни характеристического уравнения – комплексные числа

$$k_1 = \alpha + \beta i,\; k_2 = \alpha - \beta i,$$

где

$$\alpha = \frac{-p}{2} \text{ и } \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Общий интеграл имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \qquad (2.8)$$

или

$$z = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0)$$

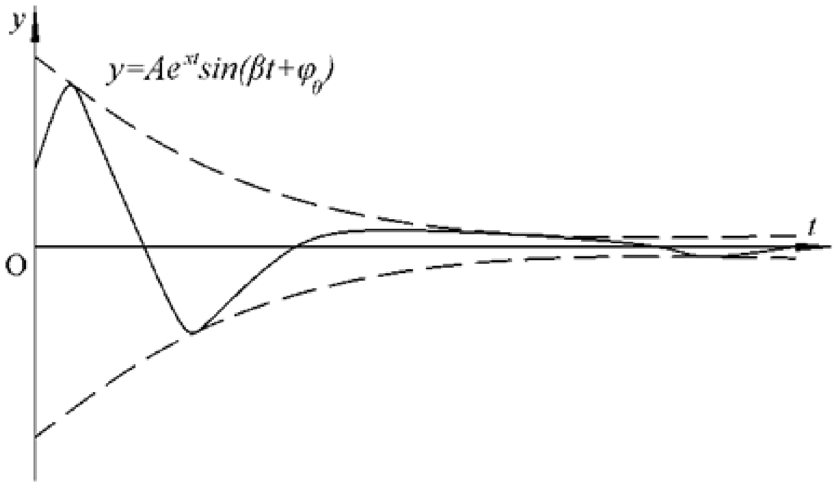

Рис. 2.3. График затухающих колебаний.

Здесь в качестве амплитуды приходится рассматривать величину $Ae^{\alpha t}$, зависящую от времени. Так как α < 0, то она стремится к нулю при $t \to \infty$, т.е. мы имеем дело с затухающими колебаниями. График, которых изображен на рис. 2.3. Что соответствует мягкости подвески. Затухание колебаний, как видно из рисунка, происходит быстро и плавно.

4. Определение формы осевого сечения быка на который опирается пролёт моста.

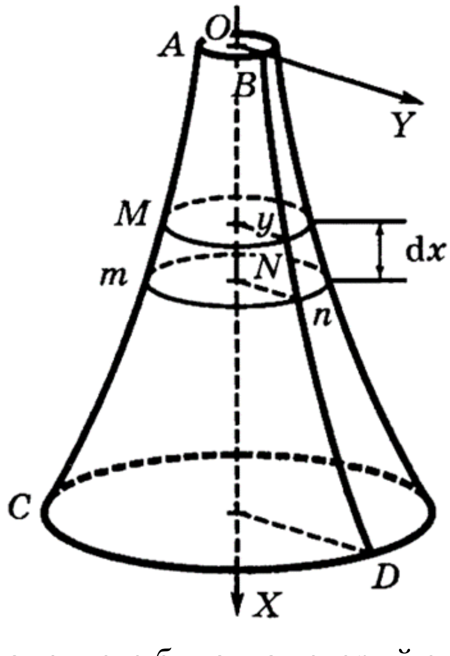

Рис. 2.4. Схема каменного быка, на который опирается пролёт моста.

Для моста строится каменный бык высотой 12м с круговыми горизонтальными сечениями. Бык рассчитан на нагрузку P = 9·10^5 Н (помимо собственного веса). Плотность материала $\gamma = 2{,}5 \cdot 10^3 \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Допустимое давление составляет $k = 3 \cdot 10^6 \ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Найти площади верхнего и нижнего оснований, а также форму осевого сечения быка (при наиболее экономном расходе стройматериала) [10].

Решение. Площадь s_0 верхнего основания при допустимом давлении k может выдержать нагрузку ks_0, а по условию $ks_0 = P$. Следовательно,

$$s_0 = \frac{P}{k} = \frac{9 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^6} = 0{,}3\text{м}^2.$$

Площадь s горизонтального сечения возрастает с понижением уровня, так как, помимо нагрузки P, на площадь s давит вышележащая часть быка.

Обозначим через x расстояние от сечения s (MN на рис. 2.4) до верхнего основания. Выделим бесконечно малый горизонтальный слой $MNnm$. Площадь его нижнего основания mn превышает площадь верхнего основания MN на ds. Поэтому у нижнего основания предельная нагрузка на kds больше, чем у верхнего. С другой стороны, нагрузка mn больше, чем нагрузка сечения MN на величину, равную весу слоя $MNnm$ т. е. на γs dx. При этом мы сделали допущение, что слой $MNnm$ цилиндрический (погрешность имеет высший порядок относительно dx). Получаем дифференциальное уравнение

$$kds = \gamma gs3dx$$

Разделяя переменные и интегрируя при начальных условиях $x = 0$, $s = s_0$, получаем:

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{s} = \frac{\gamma g}{k} \int_0^x dx.$$

откуда

$$\ln \frac{s}{s_0} = \frac{\gamma g}{k} x. \qquad (2.9)$$

Чтобы найти площадь s нижнего основания, надо подставить $x = 12$ (при $s_0 = 0{,}3$; у $= 2{,}5 \cdot 10^3$; $k = 3 \cdot 10^6$, $g = 10$ м/с^2). Переходя к десятичным логарифмам, получим:

$$\ln \frac{s_1}{0{,}3} = M \cdot \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10}{3 \cdot 10^6} \cdot 12,$$

откуда $s_1 = 0{,}33$ м^2.

Форма осевого сечения характеризуется уравнением меридиана BD. Обозначим радиус сечения MN через y; тогда $\frac{s}{s_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^2$ и равенство (2.9) дает:

$$2 \ln \frac{y}{y_0} = \frac{\gamma g}{k} x,$$

или

$$y = y_0 e^{\frac{\gamma g}{2k} x} \qquad (2.10)$$

Это уравнение и описывает меридиану. А сама линия (2.10) называется логарифмикой.