Тема 1. Непосредственное интегрирование

Многие физических и геометрических задачи сводятся к нахождению производных от функций. Наряду с этим ряд задач сводится к обратной операции – отысканию функции по ее производной. Эта операция называется интегрированием, следовательно, интегрирование должно заключаться в следующем: задана производная – требуется найти функцию.

Определение. Функцию $y = F(x)$, заданную на промежутке x, называют *первообразной* для функции $y = f(x)$, заданной на том же промежутке, если для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ (или, что, то же самое, равенство $dF(x) = f(x)dx$). Например, для функции $f(x) = \cos x$ первообразной будет функция $F(x) = \sin x$, т. к.
$F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ для всех x; для функции $3x^2$ первообразной будет функция x^3, т.к. $\left(x^3\right)' = 3x^2$ для всех x; для скорости V точки первообразной будет путь S, который прошла эта точка, т. к. $S_t' = V$, и так далее.

Так как первообразная имеет производную, следовательно, она непрерывна. Но верно и более глубокое утверждение: если функция $f(x)$ непрерывна, то она имеет первообразную. В интегральном исчислении мы будем иметь дело только с непрерывными функциями.

Если функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то и любая из функций вида $y = F(x) + C$ является первообразной для $y = f(x)$ на том же промежутке. Это следует из того, что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Нетрудно убедиться в верности и обратного утверждения: если $F(x)$ есть первообразная $f(x)$, то все первообразные для $f(x)$ содержатся в формуле $F(x) + C$.

Определение. Совокупность всех первообразных для заданной функции $f(x)$ на промежутке x называется ***неопределенным интегралом*** этой функции и обозначается так: $\int f(x)dx$ (читается: ”интеграл эф от икс дэ икс”);

- $f(x)$ называется подынтегральной функцией;
- произведение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением;
- $\int$ – знаком интеграла;

- x – переменной интегрирования.

Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$ (С– произвольная константа). Например, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$.

Из определения интеграла следует, что каждой формуле дифференциального исчисления $F'(x) = f(x)$ соответствует формула $\int f(x)dx = F(x)dx + C$ в интегральном исчислении, так что в частности вся таблица производных может быть переписана в виде таблицы интегралов:

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$; II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

III. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; IV. $\int e^x\,dx = e^x + C$;

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$;

VI. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arctg} x + C \end{cases}$;

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|$;

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

X. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

XI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

XII. $\int (\sqrt{x^2+a})dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$;

XIII. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;

XIV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

XV. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2\cdot a}\cdot\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$; $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

Займемся теперь основными свойствами неопределенных интегралов и правилами их вычисления.

Примем без доказательства свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int f(x)dx = f(x) + C$;
3. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
4. $\int df(x)dx = f(x) + C$;
5. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$; (k–постоянная);
6. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Тема 2.Интегрирование подстановкой

Замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$ в интеграл производится по формуле

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,; \tag{1.1}$$

при этом говорят, что в интеграле слева сделана замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$. Формулой (1.1) можно пользоваться следующим образом: подобрать функцию $x = u(t)$ так, чтобы, подставив вместо x подынтегральное выражение, получить более простой интеграл.

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Решение. С целью упрощения подынтегрального выражения положим $x - 3 = t^2$. Отсюда $x = t^2 + 3$, $dx = d\left(t^2 + 3\right)$, $dx = d\left(t^2 + 3\right)'\,dt$, $dx = \left[(t^2)' + 3'\right]dt$, $dx = [2t + 0]dt$, $dx = 2t\,dt$. Заменив всюду под интегралом x на $\varphi(t) = t^2 + 3$, получим

$$\int x\left(\sqrt{x-3}\right)dx = \int\left(t^2 + 3\right)\cdot\sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = \int\left(2t^4 + 6t^2\right)dt = 2\int t^4dt + 6\int t^2dt =$$

$$= 2\int t^4dt + 6\int t^2dt = 2\frac{t^{4+1}}{4+1} + 6\frac{t^{2+1}}{2+1} + C = \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-3}\right)^5 +$$

$$+ 2\left(\sqrt{x-3}\right)^3 + C.$$

При вычислении воспользовались формулой $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Пример 2. Найти $\int \dfrac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x} + C}}$.

Решение. Заметим, что $e^{4x}=\left(e^{2x}\right)^2$. Целесообразно ввести переменную $e^{2x}=t$. Тогда $de^{2x}=dt$, $\left(e^{2x}\right)'dx=dt$, $e^{2x}2dx=dt$. Заменив всюду под интегралом $e^{2x}dx$ на $\frac{dt}{2}$, e^{2x} на t, получим

$$\int\frac{3dt}{2\sqrt{t^2+5}}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+5}}=\frac{3}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+5}\right|+C=\frac{3}{2}\ln\left|e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+5}\right|+C.$$

Пример 3. Найти $\int\frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$.

Решение. Заметим, что $\sin x\,dx=-d\cos x$, т.к.

$d\cos x=(\cos x)'\,dx=-\sin x\,dx$. Целесообразно ввести переменную $t=\cos x$. Заменив всюду под интегралом $\sin x\,dx$ на $-dt$, $\cos x$ на t, получим

$$\int\frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}=-2\int\frac{dt}{\sqrt{3+t^2}}=-2\ln\left|t+\sqrt{3+t^2}\right|+C=-2\ln\left|\cos x+\sqrt{3+\cos^2 x}\right|+C.$$

Пример 4. Найти $\int\sin(3x+1)\,dx$.

Решение. Заметим, что $dx=\frac{1}{3}d(3x+1)$, т.к.

$d(3x+1)=(3x+1)'\,dx=3dx$. Целесообразно ввести переменную $t=3x+1$. Тогда $dx=\frac{1}{3}dt$. Заменив всюду под интегралом dx на $\frac{1}{3}dt$, $3x+1$ на t, получим $\int\sin(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{3}\cos t=-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C$.

На основании выше изложенного можно ввести формулу:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C, \qquad (1.2)$$

где $F(x)$ первообразная функции $f(x)$.

Тогда $\int e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C.$

Из формулы (1.2) получим:

1. $\int\sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$;

2. $\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$;

3. $\int\frac{1}{(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\ln(ax+b)+C$.

Индивидуальные задания по Теме 1-2

Вариант 1

1) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx;\quad \int \frac{\ln(x+6)}{x+6} dx;\quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x+1}};\quad \int \frac{5x dx}{6x^2+4};\quad \int e^{2x^2+1} x dx;$

$\int \frac{(2-x)^2}{x^2\sqrt{x}} dx; \int \frac{x^2+2^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx; \int \cos(1-3x) dx; \int \frac{1+\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx; \int \left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(x+3\sqrt[3]{x}+1\right) dx.$

Вариант 2

1) $\int \frac{x^3}{3x^4-2} dx;\quad \int \frac{dx}{x(1+\ln|x|)};\quad \int \frac{3\cos x}{3\sqrt{1+3\sin x}};\quad \int 5^{3x^2} x dx;\quad \int \frac{6dx}{3x+7}.$

$\int \frac{\left(3-\sqrt[3]{x}\right)}{x^2} dx; \int \frac{x\ \ +e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx; \int \sin(1+3x) dx; \int \frac{1+\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \int \left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2 dx.$

Вариант 3

1) $\int e^{x^2} x dx;\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln|x|}};\quad \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}} dx;\quad \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

$\int \frac{(3+x)^2}{x^2\sqrt{x}} dx; \int \frac{e^x}{e^x+5} dx; \int \cos\varphi \sqrt[5]{\sin\varphi} d\varphi; \int \frac{1+e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx; \int \left(\sqrt{x}+1\right)^2 dx.$

Вариант 4

1) $\int \frac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^5} dx;\quad \int e^{3x^3}\cdot 3x^2 dx;\quad \int \frac{\ln(x+5)}{x+5} dx;\quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}};\quad \int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x}.$

$\int \frac{3+\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} dx;\quad \int \frac{x^2+2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx;\quad \int \frac{1}{\cos^2(1-3x)} dx;\quad \int \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx;\quad \int \left(\sqrt[3]{x}+2\right)^2 (x+2) dx.$

Вариант 5

1) $\int e^{5x^2+2x+3}(5x+1) dx;\quad \int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x};\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}};\quad \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}};$

$\int\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx;\int\frac{2+2^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx;\int 4\sin\left(3+4x\right)dx;\ \int\frac{1+\ln^2 x}{x}dx;\int\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)dx;$

$\int\sqrt{1-x^2}\,xdx$.

Вариант 6

1) $\int\frac{2-\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$; $\int\frac{\sin xdx}{2+\cos x}$; $\int\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx$; $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}dx$;

$\int\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)}{x^2}dx;\int\frac{x\ \ +3^{\frac{1}{x}}x}{x^3}dx;\int\cos\left(3x+3\right)dx;\ \int\frac{1+\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;\int\left(\sqrt[4]{x}+3\right)^2\left(2x+1\right)dx.$

Вариант 7

1) $\int e^{3x^2+2x}\left(6x+2\right)dx$; $\int\cos^5 x\cdot\sin xd$; $\int\frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}$; $\int x\sin x^2dx$; $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx;$

$\int\frac{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx;\int\frac{x\ \ +e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx;\int\frac{1}{\sin^2\left(1+3x\right)}dx;\ \int\frac{x+\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}dx;\int\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2dx.$

Вариант 8

1) $\int x^3\cos\left(x^4\right)dx$; $\int\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$; $\int\frac{\arcsin x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int e^{3x}\left(1+e^{3x}\right)^{10}dx$;

$\int\frac{\left(3-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^2}dx;\int\frac{1\ \ -3e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx;\int\sin\left(2-5x\right)dx;\ \int\frac{1+\ln^2 x}{x}dx;\int\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)dx;$

$\int\left[\left(2x+3\right)^{10}+\left(3x+2\right)^{1/10}\right]dx.$

Вариант 9

1) $\int 3^{x^3}\cdot 3x^2dx$; $\int\cos^3 x\cdot\sin xdx$; $\int\frac{\left(\ln x\right)^2+2x^2}{x}dx$; $\int\frac{e^{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}dx$; $\int\frac{3x-1}{x^2+9}dx;$

$\int\frac{\left(1+x\right)^2}{x^2\sqrt{x}}dx;\int\frac{1+5^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx;\int 3\sin\left(1-3x\right)dx;\ \int\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx;\int\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(x+2\sqrt[3]{x}+1\right)dx.$

Вариант 10

1) $\int \frac{\mathrm{tg}^5 x dx}{\cos^2 x}$; $\int e^{3x}\sqrt{5-e^{3x}}dx$; $\int \frac{(\arcsin x)^{1/3}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int x\sqrt{1+3x^2}dx$; $\int \frac{x^5 dx}{7-4x^6}$;

$\int \frac{(1+x^2)^2}{x^2\sqrt{x}}dx; \int \frac{2x^3+e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx; \int \frac{2}{\cos^2(1+2x)}dx; \int \frac{2+\ln^2 x}{x}dx; \int\left(\sqrt[4]{x}-2\right)\left(x+2\sqrt[4]{x}+1\right)dx.$

Вариант 11

1)

$\int \frac{1+\ln^2(x+1)}{x+1}dx$; $\int (16x)\sin(4x^2)dx$; $\int \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$; $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$; $\int \frac{xdx}{x^4+1}$;

$\int \frac{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx; \int \frac{2x^2+2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx; \int \frac{4}{\cos^2(1+4x)}dx; \int \frac{x+e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx; \int\left(\sqrt{x}+1\right)^3 dx.$

Вариант 12

1) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^5}$; $\int e^{2x^2+3x+1}(4x+3)dx$; $\int \frac{\cos x}{(\sin x)^{3/2}}dx$; $\int \frac{\ln^7 x}{x}dx$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sqrt{\mathrm{tg}x}}$;

$\int \frac{\left(1-2\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}dx; \int \frac{x^5+e^{\frac{1}{x}}}{2x^2}dx; \int \frac{2}{\cos^2(1+2x)}dx; \int \frac{x+e^{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}dx; \int \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2 dx.$

Вариант 13

1) $\int \frac{x\sqrt{x}+2x^5}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{5-6x^2}$; $\int \frac{x-6}{\sqrt[3]{x^2-12x}}dx$; $\int \frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x}dx$; $\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$;

$\int \frac{(\ln x+1)^2}{x}dx; \int \frac{5x\ \ +5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx; \int \frac{\cos(1+3x)}{\sin^2(1+3x)}dx; \int \frac{2x+\sqrt{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}dx; \int \frac{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{\tilde{o}}}dx.$

Вариант 14

1) $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx$; $\int \frac{\ln(x+6)}{x+6}dx$; $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$; $\int \frac{5xdx}{6x^2+4}$; $\int e^{2x^2+1}xdx$;

$$\int\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x^3}}dx;\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx;\int\frac{2}{\sin^2(1-2x)}dx;\int\frac{x+\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx;\int\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2\sqrt{x}dx.$$

Вариант 15

$$1)\int\frac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^5}dx\ ;\ \int e^{3x^3}\cdot 3x^2dx\ ;\ \int\frac{\ln(x+5)}{x+5}dx\ ;\ \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}\ ;\ \int\frac{\cos xdx}{\sin^5 x}\ ;$$

$$\int\frac{\left(x+\sqrt[3]{x}\right)\left(x-\sqrt[3]{x}\right)}{x^2}dx;\int\frac{4x^3}{1+x^4}dx;\int\frac{4}{\cos^2(1+4x)}dx;\int\frac{x+\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx;\int\frac{x+1-x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx.$$

Вариант 16

$$1)\ \int e^{5x^2+2x+3}(5x+1)dx\ ;\ \int\frac{\sin xdx}{\cos^5 x}\ ;\ \int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\mathrm{ctg}x}}\ ;\ \int\frac{dx}{\arcsin^2 x\ \sqrt{1-x^2}}\ ;$$

$$\int\frac{(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}dx;\int\frac{x^2}{x^6+4}dx;\int\frac{\sin^3 2x}{\cos 2x}dx;\int\frac{x+3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x}dx;$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\cdot xdx.$$

Вариант 17

$$1)\ \int x^3\cos\left(x^4\right)dx\ ;\ \int\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx\ ;\ \int\frac{\arcsin x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx\ ;\ \int\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx\ ;$$

$$\int\frac{x^2\sqrt{x}+2\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}}dx\ ;\ \int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}\ ;\ \int\frac{x-6}{\sqrt[6]{x^2-12x}}dx\ ;\ \int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx\ ;\ \int\frac{x\left(1-x^2\right)dx}{1+x^4}\ ;$$

$$\int\left[(2x+3)^{10}+(3x+2)^{1/10}\right]dx\ .$$

Вариант 18

$$1)\ \int\frac{\mathrm{tg}^5 xdx}{\cos^2 x}\ ;\ \int e^{3x}\sqrt{5-e^{3x}}dx\ ;\ \int\frac{(\arcsin x)^{1/3}}{\sqrt{1-x^2}}dx\ ;\ \int x\sqrt{1+3x^2}dx\ ;\ \int\frac{x^5dx}{7-4x^6}\ ;$$

$$\int\frac{\left(\sqrt{x}+2x^5\right)^2}{\sqrt{x}}dx\ ;\ \int\frac{dx}{\sqrt{1+16x^2}}\ ;\ \int\frac{2x-1}{\sqrt[5]{x^2-x}}dx\ ;\ \int\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx\ ;\ \int\frac{5^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}\ ;$$

Вариант 19

1) $\int\frac{x\sqrt{x}+2x^5}{\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{dx}{5-6x^2}$; $\int\frac{x-6}{\sqrt[3]{x^2-12x}}dx$; $\int\frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x}dx$; $\int\frac{e^x dx}{1+e^x}$;

$\int\frac{x^2+2^{\sqrt{x}}x}{\sqrt{x^3}}dx$; $\int\sin(1-3x)dx$; $\int\frac{1+\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$; $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx$;

$\int\frac{(1-\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Вариант 20

1) $\int\frac{\sin\sqrt{x}+2x^5}{\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{12xdx}{5-6x^2}$; $\int\frac{x-6}{\sqrt[5]{x^2-12x}}dx$; $\int\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx$; $\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;

$\int\frac{3x^2}{1-9x^6}dx$; $\int\frac{x^2+2^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; $\int\frac{\cos(1-3x)}{\sqrt{\sin(1-3x)}}dx$; $\int\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2}dx$; $\int\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(x+2\sqrt[3]{x}+2\right)dx.$

Вариант 21

1) $\int 2^{5x^2+2x+3}(5x+1)dx$; $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln|x+1|}}$; $\int\frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{ctgx}}$;

$\int\frac{x^2\sqrt{x}+2x^3}{\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{dx}{5-6x^2}$; $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$; $\int\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$; $\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; $\int\sqrt{1-x^3}\cdot x^2 dx$.

Вариант 22

1) $\int\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx$; $\int\frac{\ln(x+6)}{x+6}dx$; $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{2\sin x+1}}$; $\int\frac{5xdx}{6x^2+4}$; $\int e^{2x^2+1}xdx$;

$\int\frac{\left(\sqrt{x}+2x^5\right)^2}{\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{dx}{5-6x^2}$; $\int\frac{4x-6}{\sqrt[3]{x^2-3x}}dx$; $\int\frac{2+\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}dx$; $\int\frac{e^x dx}{1+e^x}$.

Вариант 23

1) $\int\frac{(\sin x+\cos x)}{\sqrt{(\sin x-\cos x)}}dx$; $\int e^{3x^3+2x}\cdot(9x^2+2)dx$; $\int\frac{\ln^2(x+5)}{x+5}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$;

$$\int\frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}{x^2}dx;\int\frac{2x^5+2^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx;\int\sin\left(1+5x\right)dx;\int\frac{2x-\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx;\int\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx;$$

$$\int\frac{\cos x dx}{\sin^5 x}.$$

Вариант 24

1) $\int\frac{\sqrt{\ln\ (x+1)}}{x+1}dx$; $\int 2x\cos x^2 dx$; $\int\frac{2x+\mathrm{arctg}^5 x}{1+x^2}dx$; $\int\frac{3x^2}{x^3+9}dx$; $\int\frac{xdx}{x^4+1}$;

$$\int\frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^2}dx;\int\frac{5^x}{1+5^{2x}}dx;\int\sin\left(1+3x\right)dx;\int\frac{1+\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;\int\left(\sqrt[5]{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)dx.$$

Тема 3. Интегрирование по частям

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке x. Найдем дифференциал производных этих функций: $d(uv)=u'v\,du+uv'dv$.

Так как по условию функции $u'v$ и uv' непрерывны, можно проинтегрировать обе части этого равенства

$\int d(uv)=\int u'v\,dx+\int uv'\,dv$, или $\int d(uv)=\int v\,du+\int udv$, но

$\int d(uv)=uv+C$, следовательно,

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \qquad (1.3)$$

Формула (1.2) называется ***формулой интегрирования по частям***.

Сущность метода интегрирования по частям вполне соответствует его названию. Дело в том, что при вычислении интеграла этим методом подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляют в виде произведения множителей $u(x)$ и $dv(x)$: при этом dx обязательно входит в $dv(x)$. В результате получается, что заданный интеграл находят по частям: сначала находят $\int dv$, а затем $\int v\,dv$. Естественно, что этот метод применим лишь в случае, если задача нахождения указанных интегралов более проста, чем нахождение заданного интеграла.

Пример 1. Найти $\int x\sin x\,dx$.

<u>Решение.</u> Положим $u=x$, $dv=\sin x\,dx$, тогда $du=dx$, $v=\int\sin x\,dx=-\cos x$.

По формуле (1.2) находим:
$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$.

Рассмотрим некоторые конкретные способы разбиения подынтегрального выражения на множители u и dv.

В интегралах вида

$$\int P(x)e^{ax}\,dx,\ \int P(x)\sin ax\,dx,\ \int P(x)\cos ax\,dx,$$

где $P(x)$ – многочлен относительно x, a – некоторое число, полагают $u = P(x)$, а все остальные сомножители за dv.

Пример 2. Найти $\int (x+5)e^{2x}\,dx$.

Решение. Положим $u = x+5$, $dv = e^{2x}\,dx$, тогда $du = (x+5)'\,dx$ или $du = dx$, т.к. $(x+5)' = x' + 5' = 1 + 0 = 1$. Следовательно, оставшиеся сомножители равны dv. Таким образом $dv = e^{2x}\,2dx$ или $v = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,d2x = \frac{1}{2}e^{2x}$.

По формуле (1.2) находим

$$\int (x+5)e^{2x}\,dx = (x+5)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{(x+5)}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int e^{2x}\,d2x =$$
$$= \frac{(x+5)}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

В интегралах вида

$$\int P(x)\ln|ax|\,dx,\ \int P(x)\arcsin ax\,dx,\ \int P(x)\arccos ax\,dx,$$
$$\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,ax\,dx,\ \int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,ax\,dx$$

полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители – за u.

Пример 3. Найти $\int (5x^3 + 2x^2 + 3)\ln|x|\,dx$.

Решение. Положим $u = \ln|x|$, $dv = (5x^3 + 2x^2 + 3)dx$, тогда $du = (\ln|x|)'\,dx = \frac{1}{x}dx$, $\int dv = \int (5x^3 + 2x^2 + 3)dx$, откуда

$$v = \int (5x^3 + 2x^2 + 3)dx = 5\int x^3\,dx + 2\int x^2\,dx + 3\int dx = 5\frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3x =$$
$$= \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x.$$

Следовательно,

$$\int\left(5x^3+2x^2+3\right)\ln|x|\,dx=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\int\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\frac{1}{x}dx=$$
$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\left[\frac{5}{4}\int\frac{x^4}{x}dx+\frac{2}{3}\int\frac{x^3}{x}dx+3\int\frac{x}{x}dx\right]=$$
$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\left[\frac{5}{4}\int x^3\,dx+\frac{2}{3}\int x^2\,dx+3\int dx\right]=$$
$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\frac{5}{4}\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}-3x+C=$$
$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\frac{5}{16}x^4-\frac{2}{9}x^3-3x+C.$$

Индивидуальные задания по Теме 3

Вариант 1

2) $\int(x^2-3x)\sin(2x)dx;\quad \int x\sqrt{1-x}dx;\quad \int(x^4\ln x+(x+1)e^{x+1})dx;\quad \int\sqrt{x}\ln x dx.$

Вариант 2

2) $\int(x^2+4x+3)\cos x dx$; $\int\sqrt{x}\ln x dx$; $\int \operatorname{arctg} x dx$; $\int(x+2)e^{x+2}dx$.

Вариант 3

2) $\int(x+1)\ln\ (x+1)dx;\quad \int x\sin 3x dx;\quad \int\arcsin x dx;\quad \int(x+1)e^{3x}dx.$

Вариант 4

2) $\int\left(x^2+9\right)\sin 2x dx$; $\int(x+3)e^{x+4}dx$; $\int(x+1)^2\ln(x+1)dx$; $\int\arcsin dx.$

Вариант 5

2) $\int (3x+1)\sin 3x dx$; $\int (x+2)e^x dx$; $\int (x+3)^2 \ln(x+3)\ dx$; $\int \arcsin x dx$.

Вариант 6

2) $\int (2x^2+4)\cos 2x dx$; $\int \frac{\ln|x|}{x^2} dx$; $\int (3x+1)e^{x+2} dx$; $\int \operatorname{arctg} dx$.

Вариант 7

2) $\int (x+12)\cos x dx$; $\int 2xe^{2x} dx$; $\int \arcsin x dx$; $\int \ln x dx$.

Вариант 8

2) $\int (3x^2-15)\cos 3x dx$; $\int (x+2)\ln x dx$; $\int (x+3)e^{x+2} dx$; $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Вариант 9

2) $\int (x+1)^2 \ln(x+1) dx$; $\int (x^2+3x)\sin 3x dx$; $\int \operatorname{arcctg} x dx$; $\int e^x (3x+2) dx$.

Вариант 10

2) $\int x^2 e^{-x/2} dx$; $\int \{(x-1)\cos(x-1)+(x+1)\sin(x+1)\} dx$; $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$; $\int x^3 \ln x dx$.

Вариант 11

2) $\int arctgx dx$; $\int (x-1)\cos(x-1) dx$; $\int x^2 e^{3x} dx$; $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

Вариант 12

2) $\int (1-5x)\sin x dx$; $\int e^{x}(x+3)dx$; $\int \sqrt{x}\ln x dx$; $\int \arcsin x\, dx$.

Вариант 13

2) $\int (x+2)\cos 3x dx$; $\int e^{x+1}(5x-3)dx$; $\int (x+1)\ln(x+1)dx$; $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx.$

Вариант 14

2) $\int (x+3)\cos x dx$; $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$; $\int x^2 e^x dx$; $\int \tilde{o}\,\mathrm{arctg}\, x$.

Вариант 15

2) $\int (x^2+2x+1)\sin 3x dx; \int (x+2)\ e^x dx; \int (x+3)^2\ln(x+3)\ dx; \int \mathrm{arctg} x dx$.

Вариант 16

2) $\int (6\tilde{o}+3)\cos 3x dx$; $\int (x^3+x+2)\ln x dx$; $\int (x+3)e^x dx$; $\int \mathrm{arctg} x dx.$

Вариант 17

2) $\int (x+1)^2\ln(x+1)dx$; $\int (x^2+3x)\sin 3x dx$; $\int \mathrm{e}^{2x}(x+3)dx$; $\int \arccos x\, dx$.

Вариант 18

2) $\int (1-5x^2)\sin x dx$; $\int x^2 \ln x dx$; $\int x\sqrt[3]{1-x} dx$; $\int e^{x+1}(2x-5)$.

Вариант 19

2) $\int (2x+1)\cos 2x dx$; $\int x^3 \ln x dx$; $\int (2x+1)e^{2x} dx$; $\int x \arcsin x\, dx$.

Вариант 20

2) $\int (1-6x^2)\sin x dx$; $\int x^3 \ln x dx$; $\int x^2\sqrt{1-x} dx$; $\int e^{2x+1}(x-5)$.

Вариант 21

2) $\int (x+2)\cos 3x dx$; $\int e^{3x+1}(5x-3)dt$; $\int (x+1)\ln(x+1)^2 dx$; $\int \arcsin 2x dx$.

Вариант 22

2) $\int (5x+6)\cos x dx$; $\int arctg 2x dx$; $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$; $\int (x^2+2)e^x dx$.

Вариант 23

2) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; $\int (1+3x)\cos(3x+2) dx$; $\int \arcsin\ x dx$; $\int x^2 e^{2x} dx$.

Вариант 24

2) $\int x^2 e^{-x/2} dx$; $\int (x+1)\sin(x+1)dx$; $\int \arccos 3x dx$; $\int \sqrt{x}\ln x dx$

Тема 4. Интегрирование простейших дробей

Рациональной дробью называется функция $R(x)$ представленная в виде

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами.

Рациональная дробь $R(x)$ называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя.

***Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей следующих четырех типов*:**

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^n}\ (n > 1 \text{ натуральное число}),$$

$$\frac{ax+b}{px^2+qx+d};\ \frac{ax+b}{\left(px^2+qx+d\right)^n}\ (n > 1 \text{ натуральное число}),$$

где $q^2 - 4p \cdot d \prec 0$ т. е. корни знаменателя мнимые.

Таким образом, для интегрирования правильных рациональных дробей достаточно уметь: 1) интегрировать простейшие дроби, 2) разлагать рациональные дроби на простейшие.

Этот параграф посвящен решению первой из этих задач. Рассмотрим сначала простейшие дроби первых двух типов:

Пример 1. $\int \frac{A}{x-a} dx$.

Решение. Заметим, что $dx = d(x-a)$, т.к. $d(x-a) = (x-a)' dx = dx$.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)} = A\ln(x-a) + C.$$

Пример 2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$.

<u>Решение.</u>

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{d\left(x-a\right)}{\left(x-a\right)^n} = \int \left(x-a\right)^{-n} d\left(x-a\right) = A\frac{\left(x-a\right)^{-n+1}}{-n+1} + C =$$

$$\frac{A}{\left(1-n\right)\cdot\left(x-a\right)^{n-1}} + C.$$

Для интегрирования простейших дробей третьего вида $\int \frac{ax+b}{px^2+qx+d}dx$ ***вычисляют, используя замену переменных:*** $t = \frac{1}{2}\left(px^2+qx+d\right)' = px + \frac{q}{2}$, откуда $x = \frac{\left(2t+q\right)}{p}$, $dx = \frac{2}{p}dt$.

Пример 3. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2-4x+12}dx$.

<u>Решение.</u> Сделаем замену переменных $t = \frac{1}{2}\left(x^2-4x+12\right)' = \frac{1}{2}\left(2x-4\right) = x-2$, $x = t+2$, $dx = d\left(t+2\right)$, $dx = \left(t+2\right)'dt$, $dx = dt$.

Заменив всюду под интегралом x на $\left(t+2\right)$, dx на dt, получим

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+12}dx = \int \frac{3\left(t+2\right)+1}{\left(t+2\right)^2-4\left(t+2\right)+12}dt = \int \frac{3t+7}{t^2+4t+4-4t-8+12}dt = \int \frac{3t+7}{t^2+8}dt =$$

$$= 3\int \frac{t}{t^2+8}dt + 7\int \frac{dt}{t^2+8}.$$

При вычислении воспользовались формулой $\left(a \pm b\right)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.Второй из полученных интегралов является табличным, а первый находим подстановкой $t^2+8=z$, откуда $d\left(t^2+8\right) = dz$, $\left(t^2+8\right)'dt = dz$, $2t\,dt = dz$, $t\,dt = \frac{1}{2}dz$. Следовательно,

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+12}dx = \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z} + 7\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{8}\right)^2} = \frac{3}{2}\ln z + 7\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{8}} + C = \frac{3}{2}\ln\left(t^2+8\right) +$$

$$+ \frac{7}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{t}}{\sqrt{8}} + C = \frac{3}{2}\ln\left[\left(x-2\right)^2+8\right] + \frac{7}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{8}} + C.$$

Индивидуальные задания по Теме 4

Вариант 1

3) $\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; $\int\frac{xdx}{\sqrt{5+4x+x^2}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$.

Вариант 2

3) $\int\frac{dx}{x^2-4x+8}$; $\int\frac{(3x+1)dx}{x^2-4x+12}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x-3}}$; $\int\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+6x+20}}dx.$

Вариант 3

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$; $\int\frac{xdx}{13-x^2-4x}$; $\int\frac{dx}{x^2+2x+10}$; $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$.

Вариант 4

3) $\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$; $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}}$; $\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$.

Вариант 5

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+x^2+2}}$; $\int\frac{dx}{3-x^2+2x}$; $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$; $\int\frac{x}{x^2-4x+13}dx$.

Вариант 6

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$; $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$; $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+20}}$.

Вариант 7

3) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx$; $\int \frac{dx}{4x^2-8x+3}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+x+1}}$; $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+6x}}dx$;

Вариант 8

$\int \frac{x}{x^2+2x+2}dx$; $\int \frac{dx}{8+2x-x^2}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$; $\int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}dx$.

Вариант 9

3) $\int \frac{dx}{4+2x-x^2}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; $\int \frac{x+1}{x^2+8x-7}dx$; $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+5}}dx$.

Вариант 10

3) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; $\int \frac{x+1}{3-x^2+2x}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2-8x}}$; $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$.

Вариант 11

3) $\int \frac{dx}{x^2+2x}$; $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+5}}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$.

Вариант 12

3) $\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$; $\int \frac{dx}{x^2-6x-4}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2+6x}}$; $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$.

Вариант 13

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2+4x}}$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; $\int \frac{x-1}{3+2x-x^2}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Вариант 14

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$; $\int \frac{dx}{5-4x+x^2}$; $\int \frac{4x-7}{4x^2+4x-3}dx$; $\int \frac{x+2}{\sqrt{5+6x+x^2}}\mathrm{d}x$.

Вариант 15

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+9}}$; $\int \frac{dx}{x^2+6x+5}$; $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-6x+13}}\mathrm{d}x$; $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2-6x}}$.

Вариант 16

3) $\int \frac{x}{x^2+6x+10}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$; $\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$;

Вариант 17

3) $\int \frac{dx}{x^2-8x+5}$; $\int \frac{x-1}{3-x^2+2x}dx$; $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-8x-9}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2+2x}}$.

Вариант 18

3) $\int \frac{dx}{-5x^2+20x+15}$; $\int \frac{2x-2}{x^2-7x+12}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+6}}$; $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{5+6x-x^2}}$.

Вариант 19

3) $\int \frac{dx}{x^2+10x+24}$; $\int \frac{x-2}{x^2-6x+13}dx$; $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2-6x}}$.

Вариант 20

3) $\int \frac{x+1}{x^2+10x+16}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+6}}$; $\int \frac{dx}{5-x^2-4x}$; $\int \frac{(4x-3)dx}{\sqrt{5+6x-x^2}}$.

Вариант 21

3) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-4x+6}}$; $\int \frac{xdx}{x^2+2x+5}$; $\int \frac{dx}{5-4x-x^2}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Вариант 22

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x+x^2}}$; $\int \frac{5x+7}{\sqrt{5-4x+x^2}}dx$; $\int \frac{x}{x^2+6x+10}dx$; $\int \frac{x+2}{\sqrt{5+x-x^2}}dx$.

Вариант 23

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$; $\int \frac{3x-1dx}{x^2-4x+8}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; $\int \frac{dx}{3+2x-x^2}$.

Вариант 24

3) $\int \frac{dx}{x^2+4x+1}$; $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+5}}$; $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-x+2}}dx$.

§ 5. Интегрирование рациональных дробей

1. ***Схема интегрирования рациональных дробей***.

Для интегрирования рациональных дробей

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, последовательно выполняют три шага.

Первый шаг. Если дробь неправильная, т. е. степень числителя $P(x)$ больше или равна степени знаменателя $Q(x)$ – выделяют целую часть рациональной дроби $R(x)$, деля числитель $P(x)$ на знаменатель $Q(x)$ по правилу деления многочлена на многочлен. После этого рациональная дробь может быть записана в виде суммы, выделенной целой части – многочлена $M(x)$ и правильной остаточной дроби – $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

Второй шаг. Правильную остаточную дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ разлагают на простейшие дроби. Для этого находят корни уравнения $Q\ (x)=0$ и разлагают знаменатель $Q(x)$ на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами

$$Q(x) = (x-a)^k(x-b)^t...(x^2+px+q)^m(x^2+rx+\mathrm{s})^n. \qquad (1.3)$$

В этом разложении знаменателя $Q(x)$ множители первой степени соответствуют действительным корням, а множите второй степени – парам мнимых сопряженных корней. Коэффициент при наибольшей степени x в знаменателе $Q(x)$. можно считать равным единице, ибо этого всегда можно добиться, деля него $P(x)$ и $Q(x)$. Разумеется, если знаменатель $Q(x)$ уже представлен в виде (1.3), корни искать излишне.

После этого правильная остаточная дробь разлагается на простейшие по формуле

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-b)^l} +$$

$$+ \frac{a_1x+b_1}{x^2+qx+d} + \frac{a_2x+b_2}{\left(x^2+qx+d\right)^2} + \ldots + \frac{a_mx+b_m}{\left(x^2+qx+d\right)^m} + \ldots\ , \qquad (1.4)$$

где $A_1, A_2, \ldots, a_1, b_1, \ldots$ – неопределенные (неизвестные) коэффициенты (некоторые из них могут равняться нулю).

Для нахождения неопределенных коэффициентов все простейшие дроби приводят к общему знаменателю $Q(x)$ и приравнивают числители обеих частей равенства (1.4). Затем сравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x. Это приводит к системе уравнений, из которой и находятся значения интересующих нас коэффициентов.

Третий шаг. Находят интегралы выделенной целой части и всех простейших дробей (методами, рассмотренными в предшествующем параграфе), которые затем складывают.

2. *Случай, когда знаменатель разлагается лишь на неповторяющиеся множители первой степени.*

Пример 1. Найти $\displaystyle\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

Решение. Подынтегральная рациональная дробь неправильная, так как степень числителя равна степени знаменателя. Поэтому выделяем целую часть

$$\begin{array}{r|l} 5x^2+9x^2-22x-8 & x^3-4x \\ \hline -\ 5x^3 - \quad -20x & 5 \\ \hline 9x^2-2x-8 & \end{array}$$

Таким образом,

$$\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx = \int \left(5+ \frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x} \right) dx .$$

Знаменатель правильной остаточной дроби разлагается на множители следующим образом

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2).$$

По формуле (1.4) каждому множителю знаменателя вида (x – a) в разложении правильной дроби на простейшие соответствуют слагаемое вида $\frac{A}{x-a}$. Поэтому в данном случае получится разложение

$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} .$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество

$$9x^2 - 2x - 8 = A(x - 2)(x + 2)+Bx(x + 2) + Cx(x - 2)=$$
$$=\mathrm{A}x^2 -4\mathrm{A}+\mathrm{B}x^2+2\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2 -2\mathrm{C}x.$$

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны. Поэтому, отмечая за чертой слева, при каких степенях x сравниваются коэффициенты, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 9 \;= \grave{A} + \hat{A} + \tilde{N}, \\ x^1 & -2 \;= 2\hat{A} - 2\tilde{N}, \\ x^0 & -8 \;= -4\grave{A}. \end{array}$$

Из третьего уравнения системы -находим A =2. Подставляя значение A в первое уравнение и сокращая второе на 2, будем иметь

$$\begin{cases} B+C=7, \\ B-C=-1, \end{cases}$$

откуда B = 3; C = 4.

Прием, которым найдены неизвестные A, B, C, называется ***способом сравнения коэффициентов.***

Заменяя под знаком интеграла остаточную дробь ее разложением на простейшие дроби (с подставленными в него найденными значениями коэффициентов) и находя нужные интегралы, последовательно получим

$$\int \frac{5x^3+9\tilde{o}^2-22\tilde{o}-8}{x^3-4x}dx = \int \left(5+ \frac{2}{\tilde{o}} + \frac{3}{\tilde{o}-2} + \frac{4}{\tilde{o}+2} \right) dx = 5\int dx + 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-2} +$$

$$+4\int \frac{dx}{x+2} = 5\int dx + 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{d(x-2)}{x-2} + 4\int \frac{d(x+2)}{x+2} = 5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| +$$

$$+4\ln|x+2| + C.$$

3. ***Случай, когда знаменатель разлагается лишь на множители первой степени, среди которых есть повторяющиеся.***

Пример 2. Найти $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$.

<u>Решение.</u> Подынтегральная дробь правильная. Ее знаменатель уже представлен в виде (1.3). Согласно формуле (1.4), множителю x знаменателя в разложении подынтегральной функции будет соответствовать простейшая дробь $\frac{A}{x}$, а множителю $(x + 1)^3$ будет соответствовать сумма трех простейших дробей

$$\frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3};$$

поэтому разложение подынтегральной функции на простейшие дроби будет иметь вид

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим

$$3x + 2 = A(x + 1)^3 + Bx(x + 1)^2 + Cx(x + 1) + Dx = Ax^3 + 3Ax^2 + 3Ax + A +$$
$$+ Bx^3 + 2Bx^2 + Bx + Cx^2 + Cx + Dx.$$

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны. Поэтому, отмечая за чертой слева, при каких степенях x сравниваются коэффициенты, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2 \ = A; \\ x^1 & 3 \ = 3A + B + C + D, D = 1; \\ x^2 & 0 \ = 3A + 2B + C, C = -2; \\ x^3 & 0 \ = A + B, B = -2. \end{array}$$

Поэтому

$$\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx = 2\int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x+1} - 2\int\frac{dx}{(x+1)^2} + \int\frac{dx}{(x+1)^3} = 2\int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x+1} -$$

$$-2\int(x+1)^{-2}dx + \int(x+1)^{-3}dx = 2ln|x| - 2ln|x+1| - 2\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + \frac{(x+1)^{-3+1}}{-3+1} =$$

$$= 2ln|x| - 2ln|x+1| + \frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C.$$

При вычислении воспользовались заменой переменных $x+1=t$, $d(x+1)=dt,\ (x+1)'dx = dt,\ 1\cdot dx = dt.$

4. ***Случай, когда знаменатель разлагается лишь на неповторяющиеся множители второй степени и, возможно, множители первой степени.***

Пример 3. Найти $\int \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx.$

Решение. Подынтегральная дробь правильная. Ее знаменатель уже представлен в виде (1.3). Согласно формуле (1.4), множителю x^2+1 знаменателя в разложении подынтегральной функции будет соответствовать простейшая дробь $\frac{Mx+N}{x^2+1}$. Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби запишется:

$$\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{(x^2+1)}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, и приравнивая числители, получим

$$x^2-2x+2=A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)^2=Ax^3+$$

$$+Ax-Ax^2-A+Bx^2+B+Mx^3-2Mx^2+Mx+Nx^2-2Nx+N.$$

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны. Поэтому, отмечая за чертой слева, при каких степенях x сравниваются коэффициенты, получим систему уравнений

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & 2=-A+B+N, \\
x^1 & -2=A+M-2N, \\
x^2 & 0=-A+B-2M+N, \\
x^3 & 0=A+M.
\end{array}$$

Решив которую, получим A =-1, B = 0, $M=1,\ N=1.$

Поэтому

$$\int\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=-\int\frac{dx}{(x-1)}+\int\frac{x+1}{(x^2+1)}dx=$$

$$=-\int\frac{1}{(x-1)}d(x-1)+\int\frac{xdx}{(\tilde{o}^2+1)}+\int\frac{1}{(\tilde{o}^2+1)}dx=$$

$$=-\ln(x-1)+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(\tilde{o}^2+1)}+\int\frac{1}{(\tilde{o}^2+1)}dx=-\ln(\tilde{o}-1)+\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C.$$

Индивидуальные задания по Теме 5

Вариант 1

4) $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$; $\int \frac{x^3+1}{x^2+5x+6}dx$; $\int \frac{3x-3}{(x^2-x+1)(x+1)}dx$; $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^3}$.

$\int \frac{(3x^3+5x^2-25x-1)}{(x-1)^2(x+2)}dx$

Вариант 2

4) $\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-4x+5}dx$; $\int \frac{x^2+6}{x^4-16}dx$; $\int \frac{dx}{x^3(x^2+x+1)}$; $\int \frac{x^5+x^4-8}{4x^2+6x-7}dx$;

$\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x+1)}$.

Вариант 3

4) $\int \frac{x^4dx}{x^2-2x+8}$; $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+2)}dx$; $\int \frac{dx}{(x-2)x^3}$; $\int \frac{3x^3+2}{3x^2+6x+2}dx$; $\int \frac{(2x+1)dx}{x^3(x+1)}$.

Вариант 4

4) $\int \frac{x^3-1}{x^2-x-6}dx$; $\int \frac{x^3+3}{(x-1)(x+2)^2}dx$; $\int \frac{dx}{(x-1)^3x}$; $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$;

$\int \frac{x^4-1}{x^2-x-3}dx$.

Вариант 5

4) $\int \frac{dx}{(x-1)^3x}$; $\int \frac{x^5-3x^4-4x}{x^3-4x}dx$; $\int \frac{dx}{(x^3+1)}$; $\int \frac{x^3+6x^2+11x+3}{x^2+6x+10}dx$;

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x+1)}.$$

Вариант 6

4) $\int \frac{x^2+2x+1}{x(x^2+1)}dx$; $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$; $\int \frac{3x^2+5x-4}{(x-1)(x+1)^2}dx$; $\int \frac{(x^2+1)}{(x+5)^2(x^2-1)}dx$; $\int \frac{(2x^3+13x^2+24x+10)dx}{x^2+6x+9}$.

Вариант 7

4) $\int \frac{3x^2+3x+3}{x(x+1)^2}dx$; $\int \frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-6x+5}dx$; $\int \frac{x^4-3}{x^2-4x+5}dx$; $\int \frac{x+1}{x^2+4}dx$;

Вариант 8

4) $\int \frac{3x^2+5x+3}{(x+2)(x^2+1)}dx$; $\int \frac{2x^2-9x+14dx}{(x-4)^2(x+1)}$; $\int \frac{3x^2+1}{x(x^2+1)}dx$; $\int \frac{x^4+6x^3+11x^2+6x+11}{x^2+6x+10}dx$.

Вариант 9

4) $\int \frac{3x^3+x^2+2x+2}{(x^2+2)x^2}dx$; $\int \frac{x^3-7x^2+12x+3}{x^2-7x+10}dx$; $\int \frac{3x^3+26x^2+51x+5}{(x+5)^2(x^2+1)}dx$; $\int \frac{-3(x^2+x+1)}{(x+1)^3(x^2-1)}dx$.

Вариант 10

4) $\int \frac{4x^2-12x+6}{x(x^2-5x+6)}dx$; $\int \frac{-10x^2-8}{(x-2)^2(x^2+4)}dx$; $\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2-1}dx$; $\int \frac{10x-2}{(x^2+1)(x+5)}dx$.

$$\int \frac{3x^3+2x^2+7x+2}{x^2+2x+5}dx.$$

Вариант 11

4) $\int \frac{x^3+2x-1}{x^3-x}dx$; $\int \frac{3x^2-4x}{(x-2)\cdot(x^2+4)}dx$; $\int \frac{x^2-x-1}{(x-1)^3}dx$; $\int \frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)\cdot x^2}dx$;

$\int \frac{x^5-x^4-x^3-x^2-1}{x^2-x-2}dx.$

Вариант 12

4) $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx$; $\int \frac{x^4-7x^3+12x^2-1}{x^2-7x+12}dx$; $\int \frac{x-3}{x^2-x+4}dx$;

$\int \frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2\cdot(x^2+1)}dx.$

Вариант 13

4) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x-1)}$; $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)}dx$; $\int \frac{2+3x}{(x-1)(x^2+1)}dx$; $\int \frac{(x+1)^2 dx}{x^3(x^2+1)}$;

$\int \frac{x^5-7x^4+12x^3-1}{x^2-7x+12}dx.$

Вариант 14

4) $\int \frac{x^4-x^3-10x^2-8}{x^2-2x-8}dx$; $\int \frac{4-2x}{(x-1)(x^2+2)}dx$; $\int \frac{3x^3-16}{(x-2)x^3}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$;

$\int \frac{x^4+2x^3+2x}{(x^2+1)}dx.$

Вариант 15

4) $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}dx$; $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$; $\int \frac{x^2-5}{(x-3)(x-1)^2}dx$; $\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x^2+1)}$.

$\int \frac{x^3-4x^2+3x-2}{x^2-4x+3}dx$.

Вариант 16

4) $\int \frac{x^3+2x+8}{(x^2+2)x^3}dx$; $\int \frac{x^4-7x^3+168}{x^2-7x+12}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-x^3}$; $\int \frac{x^3+6x^2+9}{x^2+6x-7}dx$;

$\int \frac{x^3+2x^2+15x}{(x^2+1)(x+7)}dx$.

Вариант 17

4) $\int \frac{x^4-5x^3+6x^2-1}{x^2-5x+6}dx$; $\int \frac{dx}{x(x+1)}$; $\int \frac{x^4-4x^3-x^2-2}{(x^2+2)(x-4)}dx$; $\int \frac{xdx}{(x+5)(x-1)^2}$.

Вариант 18

4) $\int \frac{1+x-x^2}{x^3(x+1)}dx$; $\int \frac{4x+6}{(x-2)\cdot(x^2+3)}dx$; $\int \frac{x^4+1}{(x^2+x)(x-1)}dx$; $\int \frac{x^5-x^4-2}{(x+1)(x-1)^2}dx$.

Вариант 19

4) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x}dx$; $\int \frac{(x^5+x^4-x^3+7)dx}{(x-1)(x+1)^2}$; $\int \frac{2x^3-4x^2-8x-4}{(x^2-4)\cdot(x^2+1)}dx$;

$\int \frac{x^3+5x^2-15}{x^2+5x+6}dx$.

Вариант 20

4) $\int \frac{x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 12}{x^2 - 7x + 12} dx$; $\int \frac{(x^3 - 6)dx}{(x^2 + 4)(x - 1)^2}$; $\int \frac{2x^5 + 3}{x^2 + 6x + 8} dx$; $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$.

Вариант 21

4) $\int \frac{x^5 + x^2 + x - 1}{x(x + 1)(x - 1)} dx$; $\int \frac{x^2 + x - 1}{(x^3 + x^2 - 6x)} dx$; $\int \frac{x^4 + x}{(x + 1)(x^2 + 1)} dx$; $\int \frac{(x + 1)dx}{x^3 (x^2 + 1)}$.

Вариант 22

4) $\int \frac{x^4 dx}{x^2 - 2x + 8}$; $\int \frac{x}{(x - 1)(x^2 + 2)} dx$; $\int \frac{dx}{(x - 2)x^3}$; $\int \frac{4x^4 + 8}{3x^2 + 2x + 5} \mathrm{d}x$;
$\int \frac{xdx}{x^3 (x^2 + 1)}$.

Вариант 23

4) $\int \frac{dx}{x^3 + 4x}$; $\int \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 6x - 7} dx$; $\int \frac{x + 2}{x^3 - x} dx$; $\int \frac{3x^3 + 5x^2 + 11`x + 13}{x^2 - 7x + 12} dx$;
$\int \frac{(2x + 5)dx}{(x - 7)^2 (x + 5)}$.

Вариант 24

4) $\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 - 5x + 6)} dx$; $\int \frac{dx}{(x - 2)^2 (x^2 + 4)}$; $\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$;
$\int \frac{3x^3 - 2}{x^2 + x + 1} dx$; $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(2x + 5)}$.

§ 6. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических функций

Рациональной функцией $R(u,v)$ двух переменных u и v называется функция, представляющая частное двух многочленов относительно этих переменных.

В этом параграфе рассматриваются способы интегрирования рациональных функций синуса и косинуса, т. е. интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx.$$

Подстановка

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$$

которую будем называть ***универсальной***, рационализирует рассматриваемый интеграл, т. е. сводит его к интегралу рациональной дроби нового аргумента t; при такой подстановке

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} x, \quad dx = 2(\operatorname{arctg} t)' dt = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Следует, однако, учитывать, что иногда универсальная подстановка приводит к интегралу рациональной дроби, корни знаменателя которой практически невозможно найти. Это может случиться даже, если другая достаточно очевидная подстановка приводит к быстрому нахождению интеграла.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

<u>Решение.</u> Подынтегральная функция $\frac{1}{\sin x}$ рационально зависит от $\sin x$.

Применяем универсальную подстановку

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$.

Решение. Применяем универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, получим

$$\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\text{ñî s}\ x}=\int\frac{1}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2}=$$

$$=\int\frac{2dt}{t^2-8t+15}.$$

Сделаем замену переменных $z=\frac{1}{2}\left(t^2-8t+15\right)'=\frac{1}{2}(2t-8)=t-4$,

$t=z+4,\ dt=d(z+4),\ dt=(z+4)'\,dz,\ dt=dz$.

Заменив всюду под интегралом t на $(z+4)$, dt на dz, получим

$$\int\frac{2}{t^2-8t+15}dt=\int\frac{2}{(z+4)^2-8(z+4)+15}dz=\int\frac{2}{z^2+8z+16-8z-32+15}dz=\int\frac{2}{z^2-1}dt=$$

$$=2\int\frac{1}{z^2-1}dz=\frac{2}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$$

Индивидуальные задания по Теме 6

Вариант 1

6) $\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$;

Вариант 2

6) $\int\frac{dx}{\sin x}$; $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$.

Вариант 3

6); $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$.

Вариант 4

6) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$.

Вариант 5

6) $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3\cos x}$.

Вариант 6

6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\sin x \cos x}$.

Вариант 7

6) $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

Вариант 8

6) $\int \frac{dx}{2 + \sin x + 2\cos x}$.

Вариант 9

6) $\int \frac{dx}{1 + 8\cos^2 x - 6\sin x \cos x}$.

Вариант 10

6) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

Вариант 11

6) $\int \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x}$.

Вариант 12

6) $\int \frac{dx}{1+15\cos^2 x+8\sin x\cos x}$.

Вариант 13

6) $\int \frac{dx}{3+\cos x}$.

Вариант 14

6) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Вариант 15

6) $\int \frac{dx}{1+4\cos^2 x-4\sin x\cos x}$.

Вариант 16

6) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x-4}$.

Вариант 17

6) $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$.

Вариант 18

6) $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$.

Вариант 19

6) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$.

Вариант 20

6) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

Вариант 21

6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\sin x\cos x}$;

Вариант 22

6) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Вариант 23

6) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$; $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$;

Вариант 24

6) $\int \frac{dx}{19\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3}$;

§ 7. Некоторые интегралы тригонометрических функций

1. Интегрирование произведений синусов и косинусов.

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx\, dx,\ \int \sin ax \sin bx\, dx,\ \int \sin ax \cos bx\, dx$$

вычисляются с использованием формул тригонометрии

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right);$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right);$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right),$$

которые позволяют представлять произведения синусов и косинусов в виде линейных комбинаций тех же функций (с другими аргументами) и могут быть использованы для интегрирования, в рассматриваемом случае.

Пример 1. Найти $\int \sin 7x \cos x\, dx$.

Решение.

$$\int \sin 7x \cos x\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(7+1)x + \sin(7-1)x\right)dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 6x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \sin t\, dt + \frac{1}{12}\int \cos u\, du = -\frac{1}{16}\cos t + \frac{1}{12}\cos u + C = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{12}\cos 6x + C.$$

При вычислении воспользовались заменой переменных

$8x = t$, $d(8x) = dt$, $(8x)'\, dx = dt$, $8dx = dt$, $dx = \dfrac{dt}{8}$, и $6x = u$, $d6x = du$, $6dx = du$, $dx = \dfrac{du}{6}$.

2. ***Вычисление интеграла*** $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, ***где*** m ***или*** n ***– положительное нечетное целое число.***

Если показатель степени одной из тригонометрических функций положительное нечетное целое число, то, принимая другую функцию за t, сведем рассматриваемый интеграл к табличным.

Пример 2. Найти $\int \dfrac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Здесь показатель степени синуса равен единице, поэтому делаем подстановку $\cos x = t$, тогда $d\cos x = dt$, $(\cos x)'\, dx = dt$, $-\sin x\, dx = dt$, $\sin x\, dx = -dt$. Заменив всюду под интегралом $\cos x$ на t, получим

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2}\, dt = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Пример 3. Найти $\int \cos^5 x\, dx$.

Решение. Заметим, что $\cos^5 x = \left(\cos^2 x\right)^2 \cos x$. Целесообразно ввести переменную $t = \sin x$, т.к. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$. Тогда $dt = d\sin x$, $dt = (\sin x)'\, dx$, $dt = \cos x\, dx$. Заменив всюду под интегралом $\cos^2 x$ на $1 - t^2$, $\cos x\, dx$ на dt, получим

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x\,dx = \int (1-t^2)^2\,dt = \int (1-2t^2+t^4)dt = \int dt - 2\int t^2\,dt +$$

$$+\int t^4\,dt = \int dt - 2\int t^2\,dt + \int t^4\,dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

При вычислении воспользовались формулой $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3. ***Вычисление интеграла*** $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$***, где*** $m + n$ ***есть отрицательное четное целое число.***

Если сумма показателей синуса и косинуса есть отрицательное четное число, подстановка tg $x = t$ сводит интеграл к табличным.

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}}$.

Решение. $m + n$ =(7+ 1)/2 = – 4 есть отрицательное четное число, поэтому применяем подстановку tg $x = t$, $dt = (\mathrm{tg}\,x)' dx = \frac{1}{\cos^2} dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x\,\mathrm{tg}\,x}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt{\mathrm{tg}\,x}} =$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x \sqrt{\mathrm{tg}\,x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} \cdot \sqrt{\mathrm{tg}\,x}} = \int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{(t^2+1)dt}{\sqrt{t}} = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t}} + \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{\frac{3}{2}} dt + \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5} t^{\frac{2}{5}} + 2t^{\frac{1}{2}}$$

$$+ C = \frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{tg}^5 x} + 2\sqrt{\mathrm{tg}\,x} + C.$$

При вычислении воспользовались формулой $\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.

4. ***Вычисление интеграла*** $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, m ***и*** n***– четные неотрицательные числа.***

Применение формул тригонометрии

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

позволяет повторным уменьшением вдвое показателей степеней синуса и косинуса, в конечном счете, свести рассматриваемые интегралы к сумме интегралов от констант и нечетных степеней синуса и косинуса.

Пример 5. Найти $\int \cos^4 x\,dx$.

<u>Решение.</u> Заметим, что $\cos^4 x = \left[\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right]^2$.

Следовательно,

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx^{*)} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \cos t\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{4}x +$$

$$\frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx^{**)} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\int \cos u\,du = \frac{1}{4}x +$$

$$+\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin u + C = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

*) Делаем подстановку $t = 2x,\ dt = 2dx, dx = \dfrac{dt}{2}$.

**) Делаем подстановку $u = 4x,\ du = 4dx,\ dx = \dfrac{du}{4}$.

Индивидуальные задания по Теме 7

Вариант 1

6) $\int \sin^3 x\cos^3 x dx$; $\int \sin 4x\cos 6x dx$. $\int \cos^2 x dx$.

Вариант 2

6) $\int \sin x\cos 3x\,dx$; $\int \sin^2 x dx$.

Вариант 3

6) $\int \cos^5 x dx$; $\int \sin 4x\cos 2x dx$; $\int \cos^4 x\,dx$.

Вариант 4

6) $\int \cos^3 x\sin^3 x dx$; $\int \sin x\cos 2x dx$; $\int \sin^4 x\,dx$.

Вариант 5

6) $\int \cos^5 x \sin^4 x dx$; $\int \sin 6x \cos 2x dx$; $\int \mathrm{ctg}^4 x dx$.

Вариант 6

6) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$; $\int \sin x \cos 2x \cos 3x dx$; $\int \mathrm{tg}^4 x dx$.

Вариант 7

6) $\int \sin^4 x\, dx$; $\int \sin 8x \cos 2x dx$; $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$.

Вариант 8

6) $\int \cos^4 x\, dx$; $\int \sin\frac{x}{3} \cos\frac{x}{4} dx$; $\int \sqrt[5]{\cos^2 x} \sin^5 x dx$.

Вариант 9

6) $\int \sqrt[5]{\cos^3 x} \sin^3 x dx$; $\int \sin 2x \cos 4x \cos x\, dx$; $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

Вариант 10

6) $\int \cos^3 x dx$; $\int \sin\frac{x}{4} \cos\frac{x}{2}\, dx$; $\int \mathrm{ctg}^2 x\, dx$.

Вариант 11

6) $\int \cos^4 2x dx$; $\int \sin 6x \cos 2x dx$; $\int \sqrt[5]{\sin^2 x} \cos^5 x dx$.

Вариант 12

6) $\int \sqrt[5]{\cos^2 x} \sin^3 x\, dx$; $\int \sin 2x \cos 2x \cos x\, dx$; $\int \mathrm{tg}^5 x\, dx$.

Вариант 13

6) $\int \cos^5 x dx$; $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}\, dx$; $\int \mathrm{ctg}^3 x\, dx$.

Вариант 14

6) $\int \cos^2 3x \sin^2 3x dx$; $\int \mathrm{ctg}^5 x dx$; $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin x dx$.

Вариант 15

6) $\int \cos^3 x \sqrt{\sin^3 x}\, dx$; $\int \sin 2x \cos 4x \cos 6x\, dx$; $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Вариант 16

6) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x dx$; $\int \sin 3x \cos 5x dx$. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.

Вариант 17

6) $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx$; $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}\, dx$; $\int \mathrm{tg}^7 x\, dx$.

Вариант 18

6) $\int \cos^5 x dx$; $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{2}\, dx$; $\int \mathrm{ctg}^7 x\, dx.$

Вариант 19

6) $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x dx$; $\int \sin 4x \cos 6x \sin 2x dx$. $\int \sin^2 x dx$.

Вариант 20

6) $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$; $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$; $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$; $\int \sin 3x \sin 2x dx$.

Вариант 21

6) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx$; $\int \sin 2x \cos 4x \cos 2x\, dx$; $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Вариант 22

6) $\int \sin 7x \cos 4x\, dx$; $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Вариант 22

6) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$; $\int \sin 3x \cos x dx$.

Вариант 24

6) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx$; $\int \sin 7x \cos 4x\, dx$; $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

§ 8. Интегрирование некоторых алгебраических иррациональностей

1. ***Интегралы вида*** $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx$ ***(n – натуральное число).***

Символ $R(x, \sqrt[n]{x})$ означает рациональную функцию от x и $\sqrt[n]{x}$.

Интегралы вида $R(x, x^r, x^s, ...)dx$, где $r, s, ...$ – рациональные числа, относятся к рассматриваемому типу, так, как, если n – общий знаменатель дробей r s, ..., то подынтегральная функция оказывается рациональной функцией от x и $x^{\frac{1}{n}}$.

Так, функция $\frac{3x - \sqrt[3]{x}}{x^3 + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{3x - \left(\sqrt[12]{x}\right)^4}{x^3 + \left(\sqrt[12]{x^2}\right)^3}$ есть $R(x, \sqrt[n]{x})$.

Подстановка $x = t^n$ (n – общее наименьшее кратное показателей всех радикалов, под которыми x входит в подынтегральную функцию) рационализирует рассматриваемый интеграл, т. е. сводит его к интегралу рациональной дроби.

Пример 1. Найти $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx$.

Решение x входит в подынтегральную функцию под радикалами с показателями 2 и 3. Общее наименьшее кратное показателей 6, поэтому делаем подстановку

$$x=t^6,\ dx=\left(t^6\right)' dt,\ dx=6t^5dt,\ t=\sqrt[6]{x}.$$

Тогда

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{\sqrt{t^6}}{t^6-\sqrt[3]{\left(t^6\right)^2}}6t^5dt=6\int\frac{t^3t^5}{t^6-t^4}dt=6\int\frac{t^8dt}{t^4\left(t^2-1\right)}=6\int\frac{t^4dt}{t^2-1}=$$

$$=6\int\frac{t^4-1+1}{t^2-1}dt=6\int\frac{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)+1}{t^2-1}dt=6\int\frac{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}{t^2-1}dt+6\int\frac{1}{t^2-1}dt=$$

$$=6\int\left(t^2+1\right)dt-6\int\frac{dt}{1-t^2}=6\int t^2\,dt+6\int dt-6\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|=6\cdot\frac{t^{2+1}}{2+1}+6t-$$

$$-3\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=2t^3+6t-3\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+6\sqrt[6]{x}-3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}\right|+C$$

2. ***Интегралы вида*** $\int\frac{ax+b}{\sqrt{px^2+qx+d}}dx$**.** Интегралы этого вида вычисляют, используя замену переменных: $t=\frac{1}{2}\left(px^2+qx+d\right)'=px+\frac{q}{2}$, откуда $x=\frac{(2t+q)}{p}$, $dx=\frac{2}{p}dt$.

Пример 2. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

Решение. Сделаем замену переменных

$$t=\frac{1}{2}\left(2+3x-2x^2\right)'=\frac{1}{2}(3-4x)=\left(\frac{3}{2}-2x\right),\ x=\frac{3}{4}-\frac{t}{2},\ dx=d\left(\frac{3}{4}-\frac{t}{2}\right),$$

$$dx=\left(\frac{3}{4}-\frac{t}{2}\right)'dt,\ dx=\frac{-1}{2}dt.$$

Заменив всюду под интегралом x на $\left(\frac{3}{4}-\frac{t}{2}\right)$, dx на $\frac{-dt}{2}$, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\int\frac{\frac{-1}{2}dt}{\sqrt{2+3\left(\frac{3}{4}-\frac{t}{2}\right)-2\left(\frac{3}{4}-\frac{t}{2}\right)^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2+\frac{9}{4}-\frac{3t}{2}-2\left(\frac{9}{16}-2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}\right)}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2+\frac{9}{4}-\frac{3t}{2}-\frac{9}{8}+\frac{3t}{2}-\frac{t^2}{2}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{8}-\frac{t^2}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{4}-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\frac{t}{5/2}+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\frac{2t}{5}+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\frac{2\left(\frac{3}{2}-2x\right)}{5}+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\frac{3-4x}{5}+C.$$

Индивидуальные задания по Теме 8

Вариант 1

5) $\int\frac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}dx$; $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; $\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^{3/2}}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+2}}$.

Вариант 2

5) $\int\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$; $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}}dx$; $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{10x^2-6x+1}}$.

Вариант 3

5) $\int\frac{1+\sqrt{x-1}}{2-x}dx$; $\int\frac{x^{1/3}}{2+x^{2/3}}dx$; $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Вариант 4

5) $\int \frac{1-\sqrt{x-2}}{x}dx$; $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{3x-2}}$.

Вариант 5

5) $\int \frac{1+\sqrt{1+x}}{x}dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Вариант 6

5) $\int \frac{x}{x-2\sqrt{x-1}}dx$; $\int \frac{x^{1/2}}{1+x}dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+4x+4}}$.

Вариант 7

5) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+1}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2+2x+5}}$.

Вариант 8

5) $\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}dx$; $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$; $\int \frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}$.

Вариант 9

5) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$; $\int \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$; $\int \frac{dx}{2x\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Вариант 10

5) $\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{x+2}dx$; $\int \frac{x+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$.

Вариант 11

5) $\int x\sqrt[3]{1-x}dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$; $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+1}}$.

Вариант 12

5) $\int(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$; $\int\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{7x^2+8x+1}}$.

Вариант 13

5) $\int\frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx$; $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}dx$; $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{7x^2-4x+1}}$.

Вариант 14

4) $\int\frac{x-\sqrt{x-2}}{x+1}dx$; $\int\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{\left(1+x^2\right)}}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-8}}$.

Вариант 15

5) $\int\frac{x}{1+\sqrt{x-2}}dx$; $\int\frac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}}dx$; $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{80x^2+18x+1}}$.

Вариант 16

5) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{3-x}}$; $\int\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$; $\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}dx$; $\int\frac{1}{x\sqrt{10x^2+6x+1}}dx$.

Вариант 17

5) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}dx$; $\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[2]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Вариант 18

5) $\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}dx$; $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[2]{x}}dx$; $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+1}}$.

Вариант 19

5) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+3}dx$; $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[2]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}dx$; $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+4x+1}}$.

Вариант 20

5) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$; $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+1}}$.

Вариант 21

4) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx$; $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}dx$; $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+7}}$.

Вариант 22

5) $\int \frac{x-\sqrt{x-1}}{x+1}dx$; $\int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{\left(1+x^2\right)}}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-8}}$.

Вариант 23

5) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}$; $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-5x+3}}$.

Вариант 24

5) $\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{x+2}dx$; $\int \frac{x-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+1}}$.