**Типавой расчет №1 (2-0й сем.)**
**“ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ”**
**1 Первообразная и неопределенный интеграл**

**Пример 1.** Вычислить $\int\limits_1^4 \left(1+5x+\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx$.

**__Решение.__** Используя правила 1 и 2, представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_1^4 \left(1+5x+\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx=\int\limits_1^4 dx+5\int\limits_1^4 x\,dx+\frac{3}{2}\int\limits_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx=x\Big|_1^4+5\frac{x^2}{2}\Big|_1^4+\frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4=$$

$$=x\Big|_1^4+\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4+x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=(4-1)+\frac{5}{2}\left(4^2-1^2\right)+\left(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=3+\frac{75}{2}+7=\frac{95}{2}.$$

**Пример 2.** Вычислить $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx$.

**__Решение.__** Положим $u=\operatorname{arctg}x$; $dv=x\,dx$, тогда

$$du=(\operatorname{arctg}x)'\,dx=\frac{1}{1+x^2}dx, v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 (x\operatorname{arctg}x)dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\frac{0^2}{2}\operatorname{arctg}0-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}-0=\frac{\pi}{4}.$$

**Пример 3.** Вычислить $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

**Решение.** Сделаем замену $t = x^2 + 9$, тогда $dt = d(x^2+9)$; $dt = (x^2+9)' dx$; $dt = 2x\,dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = x^2 + 9$; если $x = 0$, то $t_{нижн} = 0^2 + 9 = 9$; если $x = 4$, то $t_{верхн} = 4^2 + 9 = 25$.

Поэтому

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_9^{25} x\sqrt{t}\,\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_9^{25} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_9^{25} = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_9^{25} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(5^{2\cdot\frac{3}{2}} - 3^{2\cdot\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(5^3 - 3^3\right) = \frac{1}{3}(125 - 27) = \frac{98}{3}.$$

**Задача 1**

**1)** Вычислить $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

Решение. Сделаем замену $t = \ln x$, тогда $dt = d\ln x$; $dt = (\ln x)' dx$; $dt = \frac{1}{x}dx$; $dx = x\,dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = \ln x$; если $x = 1$, то $t_{нижн} = \ln 1 = 0$; если $x = \sqrt{e}$, то $t_{верхн} = \ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$. Таким образом, изменению переменной от $x = 1$ до $x = \sqrt{e}$ соответствует изменение переменной $t$ от $t_{нижн} = 0$ до $t_{верхн} = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,dt}{x\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 =$$

$$= \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

**2)** Вычислить $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$.

**Решение.** Положим $1 - \cos x = t$,тогда $dt = (1-\cos x)' dx$; $dt = \sin x\,dx$; $dx = \frac{dt}{\sin x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения

$t = 1 - \cos x$; если $x = \dfrac{\pi}{2}$, то $t_{нижн} = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$; если $x = \pi$, то $t_{верхн} = 1 - \cos\pi = 1 - (-1) = 2$. Таким образом, изменению переменной $x$ от $x = \dfrac{\pi}{2}$ до $x$=2 соответствует изменение переменной $t$ от $t_{нижн} = 1$ до $t_{верхн} = 2$. Следовательно,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2} = \int_1^2 \frac{2\sin x \dfrac{dt}{\sin x}}{t^2} = 2\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = 2\int_1^2 t^{-2}dt = 2\left.\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^2 = 2\left.\frac{t^{-1}}{-1}\right|_1^2 =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

3) Вычислить $\displaystyle\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$.

**<u>Решение</u>.** Положим $8 - x = t$, тогда $dt = (8-x)' dx$; $dt = -1dx$; $dx = -dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = 8 - x$; если $x = 0$, то $t_{нижн} = 8 - 0 = 8$; если $x = 7$, то $t_{верхн} = 8 - 7 = 1$. Таким образом, изменению переменной $x$ от $x = 0$ до $x = 7$ соответствует изменение переменной $t$ от $t_{нижн} = 8$ до $t_{верхн} = 1$, следовательно,

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \int_8^1 -\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\int_8^1 t^{-\frac{2}{3}}dt = -\left.\frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right|_8^1 = -\left.\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_8^1 = -3\sqrt[3]{t}\Big|_8^1 =$$

$$= -3\left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{8}\right) = -3(1-2) = 3.$$

### Контрольные варианты к задаче 1.

**ЗАДАНИЕ**. Вычислить определенные интегралы:

**1.** 1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 1\right)^3 x\,dx$;

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{2 - \cos x}$;

**2.** 1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{2\sqrt{1+x^2}}$;

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\cos^2 x}$;

3) $\int\limits_0^{\pi}\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)dx$

3) $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}$.

**3.** 1) $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{128x\,dx}{\left(x^2+1\right)^5}$;

2) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

3 $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx$.

**4**. 1) $\int\limits_2^{3}\frac{15x\,dx}{\left(x^2-1\right)^3}$;

2) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}x\sin x^2\,dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x\,dx}{\sin 2x}$.

**5.** 1) $\int\limits_0^{1}\frac{6x^2\,dx}{1+2x^3}$;

2) $\int\limits_0^{1}xe^{x^2}\,dx$;

3) $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

**6.** 1) $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{3-\cos x}$

2) $\int\limits_1^{e}\frac{\ln x}{x}dx$;

3) $\int\limits_0^{1}\left(x^2+3\right)^2 dx$.

**7.** 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{2+\sin x}$;

2) $\int\limits_6^{7}(x-5)^2\,dx$;

3) $\int\limits_0^{1}x\left(x^2+3\right)^4 dx$.

**8.** 1) $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{2-\cos x}$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[5]{\cos x}\sin x\cdot dx$;

3) $\int\limits_0^{1}\frac{e^x}{1+e^x}\cdot dx$.

**9.** 1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^3 x\cdot dx$;

2) $\int\limits_{-0{,}25\pi}^{0{,}25\pi}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\cdot dx$;

**10.** 1) $\int\limits_0^{1}\frac{e^x\,dx}{e^x+5}$;

2) $\int\limits_1^{2}\left(x^5+x\right)^2 dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2 \cdot dx$.

3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{6x+5}{\left(3x^2+5x+1\right)^2}$.

**11.** 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x}\sin x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$.

**12.** 1) $\int\limits_{0}^{1} 3e^{x^3}x^2\,dx$;

2) $\int\limits_{0}^{1} (x+2)^2\,dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

**13.** 1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$;

2) $\int\limits_{0}^{1} x e^{x^2}\,dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}\,x\,dx$

**14.** 1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{6-5x+x^2}$;

2) $\int\limits_{0}^{1} \left(x^2+1\right)x\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

**15.** 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$;

2) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx$;

3) $\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x^2}$.

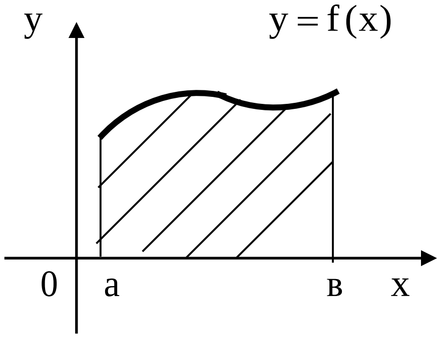
**16.** 1) $\int\limits_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\,dx$;

2) $\int\limits_{1}^{2} (x+1)^2\cdot x\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}$.

Как было показано выше с помощью определенного интеграла можно вычислять площади плоских фигур, ограниченных кривыми. Напомним, что кривые могут быть заданы **различными способами**:

а) если фигура представляет из себя **криволинейную трапецию** вида. $f(x)>0$

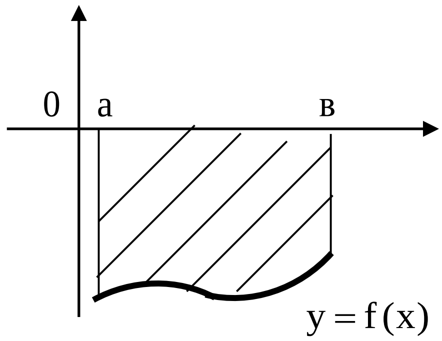



Тогда её площадь вычисляется по формуле:

$$S_ф = S_{кр.тр.} = \int_a^в f(x)dx;$$

Рисунок 4

б) если криволинейная трапеция расположена ниже оси $Ox$, т.е. $f(x)<0$ тогда исходя из **свойств определенного интеграла**



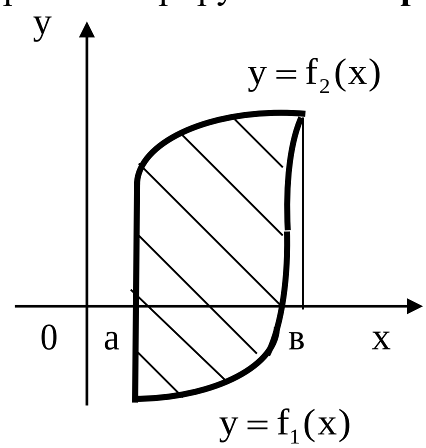

$$S_ф = -\int_a^в f(x)dx.$$

Рисунок 5

В общем случае $S_ф = \left|\int_a^в f(x)dx\right|;$

в) если плоская фигура имеет сложную форму, т.е. прямые $x = a$; $x = в$ «вырождаются» в точки, то фигуру следует разбить на части так, чтобы можно было применить известные формулы.

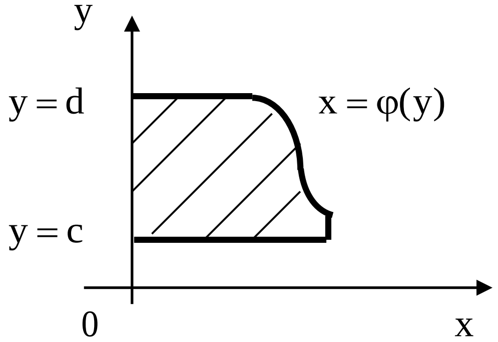
Проиллюстрируем **некоторые** возможные варианты:




$$S_ф = \int_a^в \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx;$$

Рисунок 6

г) если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью $Oy$ и непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, то $\Rightarrow$




$$S_\phi = \int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

Рисунок 7

**<u>Задача 2.</u>** 1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 5x + 6$ и прямой $y = x + 1$.

**Решение**

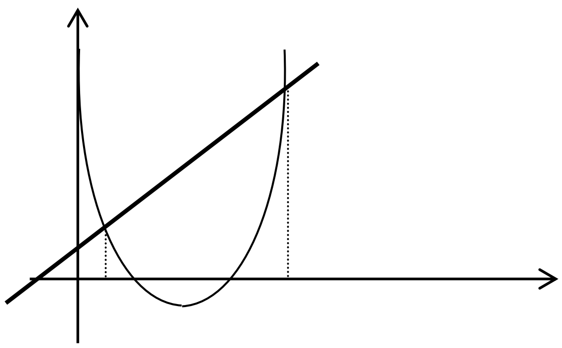


Рисунок 8

Найдем точки пересечения графиков этих линий (рис. 8):

$$x^2 - 5x + 6 = x + 1, \quad x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2},$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5.$$

Так как $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx$, то пло-

$$S = \int_1^5 \left[\left(x + 1\right) - \left(x^2 - 5x + 6\right)\right] dx = \int_1^5 \left(6x - 5 - x^2\right) dx = \left(6\frac{x^2}{2} - 5x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^5 =$$

$$= \left(6 \cdot \frac{5^2}{2} - 5 \cdot 5 - \frac{5^3}{3}\right) - \left(6 \cdot \frac{1^2}{2} - 5 \cdot 1 - \frac{1^3}{3}\right) = \left(75 - 25 - \frac{125}{3}\right) - \left(3 - 5 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 50 - \frac{125}{3} + 2 + \frac{1}{3} = 52 - \frac{124}{3} = \frac{156 - 124}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

**Ответ:** $S = \dfrac{32}{3}$ м$^2$.

2) Вычислить площадь между параболами $y = 4x - x^2$ и $y = x^2 - 6$ (рис.9).

Решение. Сначала найдем точки пересечения парабол, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 4x - x^2; \\ y = x^2 - 6, \end{cases}$$

т.е. найдем точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют одновременно уравнениям обеих парабол. Из этой системы

$x^2 - 6 = 4x - x^2,$

$2x^2 - 4x - 6 = 0,$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ и

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \text{ или } x_1 = -1; x_2 = 3.$$

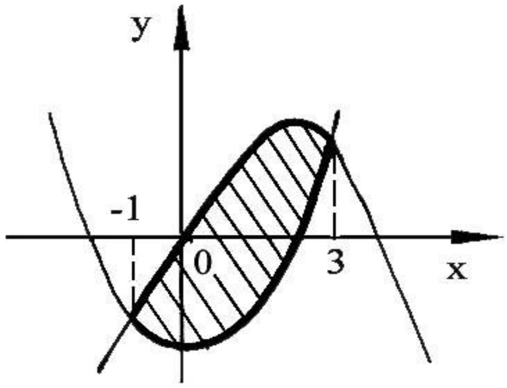


Рис.9

Тогда по формуле (1.18) искомая площадь $S$ будет равна:

$$S = \int_{-1}^{3} \left[\left(4x - x^2\right) - \left(x^2 - 6\right)\right] dx = \int_{-1}^{3} \left[6 + 4x - 2x^2\right] dx =$$

$$= \left[6x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]\Big|_{-1}^{3} = \left[6 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - \frac{2}{3} \cdot 3^3\right] -$$

$$- \left[6 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3\right] = 18 - \left[-\frac{10}{3}\right] = 18 + \frac{10}{3} = 64.$$

### Контрольные варианты к задаче 2.

**ЗАДАНИЕ.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

**1.** 1) $y = 6x - x^2, \quad y = 0;$ 2) $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 4.$

**2.** 1) $y = x^2 + 4x, \quad x - y + 4 = 0.$ 2) $x\,y = 6, \quad y = 7 - x.$

**3.** 1) $y = x^3, \quad y = x;$ 2) $y = x^2 - 6x + 10, \quad y = x.$

**4.** 1) $y = x^3, \quad y = 2x;$ 2) $x^2 = 9y, \quad x = 3y - 6.$

**5.** 1) $y^2 = 4x, \quad y = x;$ 2) $y = 2 - x^2, \quad y^3 = x^2.$

**6.** 1) $y^2 = 4x, \quad y = \frac{1}{4}x^2;$ 2) $x = 2 - y - y^2, \quad x = 0.$

**7.** 1) $3y = x^2, \quad 3x = y^2;$ 2) $y = 6x - x^2 - 5, \quad y = 0.$

**8.** 1) $y = x^2 - 3x, \quad y = 4 - 3x;$ 2) $y = x^2 - 5x + 6, \quad x = 0, \quad y = 0.$

**9.** 1) $y = 2x - x^2, \quad y = x;$ 2) $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 1.$

**10.** 1) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 4 - x;$ 2) $y^3 = x^2, \quad y = 1.$

**11.** 1) $x = y^2, \quad x = \frac{3}{4}y^2 + 1;$ 2) $y = \ln x, \quad x = e, \quad y = 0.$

**12.** 1) $y = x^2, \quad 2x - y + 3 = 0;$ 2) $x\,y = 6, \quad x = 1, \quad x = e, \quad y = 0.$

**13.** 1) $y = 4 - x^2, \quad y = 0;$ 2) $y^2 = 9x, \quad y = 3x.$

**14.** 1) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad x + 2y - 6 = 0;$ 2) $y = x^2, \quad y^2 = x.$

**15.** 1) $4x = y^2, \quad 4y = x^2;$ 2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3, \quad y = 1.$

**16.** 1) $y = x^2, \quad y = x + 2;$ 2) $x = 8y - y^2 - 7, \quad x = 0.$

**17.** 1) $y = 6x - x^2, \quad y = 0;$ 2) $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 4.$

**18.** 1) $y = x^2 + 4x, \quad x - y + 4 = 0.$ 2) $x\,y = 6, \quad y = 7 - x.$

**19.** 1) $y = x^3, \quad y = x;$ 2) $y = x^2 - 6x + 10, \quad y = x.$

**20.** 1) $y = x^3, \quad y = 2x;$ 2) $x^2 = 9y, \quad x = 3y - 6.$

**21.** 1) $y^2 = 4x, \quad y = x;$ 2) $y = 2 - x^2, \quad y^3 = x^2.$

**22.** 1) $y^2 = 4x, \quad y = \frac{1}{4}x^2;$ 2) $x = 2 - y - y^2, \quad x = 0.$

**23.** 1) $3y = x^2, \quad 3x = y^2;$ 2) $y = 6x - x^2 - 5, \quad y = 0.$

**24.** 1) $y = x^2 - 3x, \quad y = 4 - 3x;$ 2) $y = x^2 - 5x + 6, \quad x = 0, \quad y = 0.$

**25.** 1) $y = 2x - x^2, \quad y = x;$ 2) $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 1.$

**26.** 1) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 4 - x;$ 2) $y^3 = x^2, \quad y = 1.$

**27.** 1) $x = y^2, \quad x = \frac{3}{4}y^2 + 1;$ 2) $y = \ln x, \quad x = e, \quad y = 0.$

**28.** 1) $y = x^2, \quad 2x - y + 3 = 0;$ 2) $x\,y = 6, \quad x = 1, \quad x = e, \quad y = 0.$

**29.** 1) $y = 4 - x^2, \quad y = 0;$ 2) $y^2 = 9x, \quad y = 3x.$

**30.** 1) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad x + 2y - 6 = 0;$ 2) $y = x^2, \quad y^2 = x.$

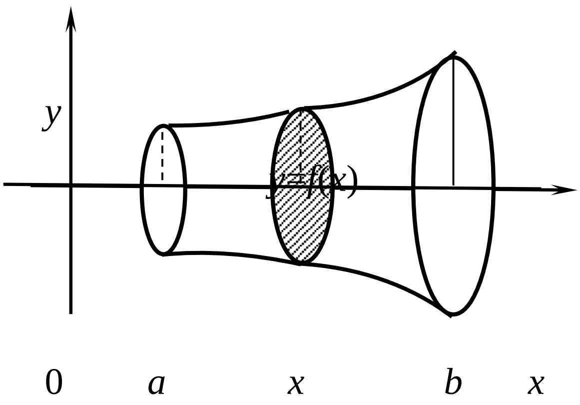
## Вычисление объема тела вращения

Пусть функция $f(x)$, $x \in [a; b]$, непрерывна на отрезке $[a; b]$. Требуется вычислить объем $V$ тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$; $y = 0$; $x = a$; $x = b$ (рис. 10).

Так как любое поперечное сечение тела есть круг радиусом $|y|$, то площадь сечения будет $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$.

Проинтегрировав сечение на отрезке $[a; b]$, найдем

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \qquad (2.10)$$



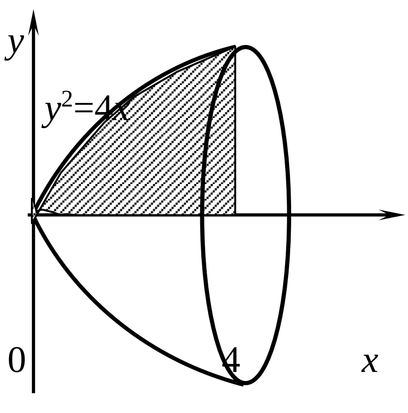



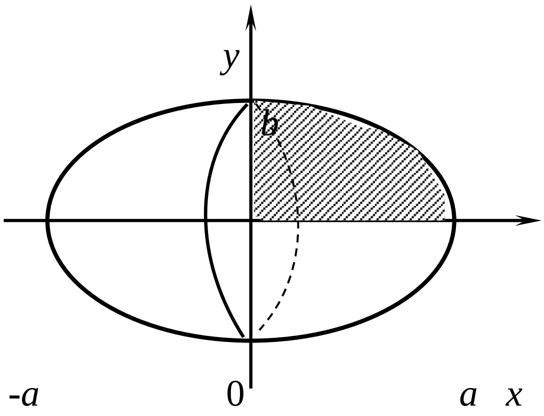

Рис.11

**Пример 7.** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 4$ (рис. 19).

<u>**Решение.**</u> Такое тело называется параболоидом вращения. Применив формулу (2.27), получим

$$V = \pi \int_0^4 4x\,dx = 4\pi \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 = 2\pi 4^2 - 2\pi 0^2 = 32\pi.$$

**Пример 8.** Вычислить объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси $0x$ (рис. 12).




**Решение.** Рассматриваемое тело называется ***эллипсоидом вращения***. Эллипс пересекает ось $0x$ в точках $x = -a$ и $x = a$.

Из уравнения эллипса находим

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right).$$

Ввиду симметричности эллипса относительно оси $0y$ вычислим объем в пределах от 0 до $a$ и полученный результат удвоим:

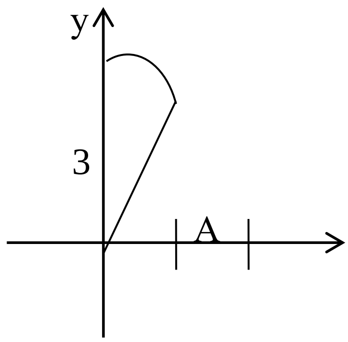
$$V=2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}a^2dx-$$

$$-2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}x^2dx=2\pi b^2\int_0^a dx-2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a x^2dx=2\pi b^2x\Big|_0^a-\ 2\pi\frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a=$$

$$=2\pi b^2a-2\pi\frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3}=\frac{2\pi b^2a^3}{a^2}-\frac{2\pi b^2a^3}{3a^2}=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4\pi ab^2}{3}.$$

**Задача 3.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=2x;\quad y=3-x^2,\quad x=0\ (x\ge 0)$.

**Решение**




Найдем точки пересечения параболы $y=3-x^2$ и прямой $y=2x$ (рис. 9).

$$2x=3-x^2,$$

$$x^2+2x-3=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2},$$

$$x_1=-3,\quad x_2=1.$$

Выбираем, как дано, x больше нуля, значит, $x=1$. Так как объем тела вращения $V=\pi\int_a^b y^2dx$, а в данном случае $V=\pi\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx$, объем

$$V=\pi\int_0^1\left[\left(3-x^2\right)^2-\left(2x)^2\right)\right]dx=\pi\int_0^1\left(9-6x^2+x^4-4x^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(9-10x^2+x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left[9x-10\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1=\pi\left(9-\frac{10}{3}+\frac{1}{5}\right)=\pi\frac{135-50+3}{15}=\pi\frac{88}{15}\approx 18{,}43.$$

**Ответ:** $V\approx 18{,}43\ \text{см}^3$..

**Контрольные варианты к задаче 3.**

**ЗАДАНИЕ** Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси $OX$ фигуры, ограниченной линиями:

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | 1) $x\,y=5,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=5;$ | 2) $y^2=x^3,\quad x=1,\quad y=0.$ |
| **2.** | 1) $y=9-x^2,\quad y=0;$ | 2) $2x+3y-6=0,\quad x=0,\quad y=0.$ |
| **3.** | 1) $y=2x-x^2,\quad y=0;$ | 2) $x\,y=2,\quad x=2,\quad x=4.$ |
| **4.** | 1) $y=\sqrt{5-x},\quad x=-5,\quad y=0;$ | 2) $y=x^2,\quad 2x-y+3=0.$ |
| **5.** | 1) $y=e^x,\quad x=0,\quad x=1,\quad y=0;$ | 2) $y=x^2-9,\quad y=0.$ |
| **6.** | 1) $y=\ln x,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=2;$ | 2) $y=4x-x^2,\quad y=0.$ |
| **7.** | 1) $y=-x^2+8,\quad y=x^2;$ | 2) $x\,y=4,\quad x=1,\quad x=4,\quad y=0.$ |
| **8.** | 1) $2y^2=x^3,\quad x=4;$ | 2) $y=e^x,\quad x=0,\quad y=0,\quad x=1.$ |
| **9.** | 1) $y^2=2x,\quad x=3,\quad y=0;$ | 2) $y^2=x^3,\quad y=0,\quad x=1.$ |
| **10.** | 1) $y^2=2x,\quad 2x=3;$ | 2) $y=8x-x^2,\quad y=0.$ |
| **11.** | 1) $y^2=9x,\quad y=3x;$ | 2) $x\,y=1,\quad x=1,\quad x=5.$ |
| **12.** | 1) $y=\sin x,\quad x=0,\quad x=\pi,\quad y=0;$ | 2) $y^2=4x,\quad x=4,\quad y=0.$ |
| **13.** | 1) $y=x^2+1,\quad y=0,\quad x=-2,\quad x=2;$ | 2) $x\,y=2,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=2.$ |
| **14.** | 1) $x\,y=4,\quad 2x+y-6=0;$ | 2) $y^2=2x,\quad x^2=2y.$ |

| | | |
|---|---|---|
| **15.** | 1) $y=3x-x^2,\quad y=0;$ | 2) $x\,y=1,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=3.$ |
| **16.** | 1) $y=e^{2x},\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1;$ | 2) $5x+3y-15=0,\quad y=0,\quad x=0.$ |
| **17.** | 1) $x\,y=5,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=5;$ | 2) $y^2=x^3,\quad x=1,\quad y=0.$ |
| **18.** | 1) $y=9-x^2,\quad y=0;$ | 2) $2x+3y-6=0,\quad x=0,\quad y=0.$ |
| **19.** | 1) $y=2x-x^2,\quad y=0;$ | 2) $x\,y=2,\quad x=2,\quad x=4.$ |
| **20.** | 1) $y=\sqrt{5-x},\quad x=-5,\quad y=0;$ | 2) $y=x^2,\quad 2x-y+3=0.$ |
| **21.** | 1) $y=e^x,\quad x=0,\quad x=1,\quad y=0;$ | 2) $y=x^2-9,\quad y=0.$ |
| **22.** | 1) $y=\ln x,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=2;$ | 2) $y=4x-x^2,\quad y=0.$ |
| **23.** | 1) $y=-x^2+8,\quad y=x^2;$ | 2) $x\,y=4,\quad x=1,\quad x=4,\quad y=0.$ |
| **24.** | 1) $2y^2=x^3,\quad x=4;$ | 2) $y=e^x,\quad x=0,\quad y=0,\quad x=1.$ |
| **25.** | 1) $y^2=2x,\quad x=3,\quad y=0;$ | 2) $y^2=x^3,\quad y=0,\quad x=1.$ |
| **26.** | 1) $y^2=2x,\quad 2x=3;$ | 2) $y=8x-x^2,\quad y=0.$ |
| **27.** | 1) $y^2=9x,\quad y=3x;$ | 2) $x\,y=1,\quad x=1,\quad x=5.$ |
| **28.** | 1) $y=\sin x,\quad x=0,\quad x=\pi,\quad y=0;$ | 2) $y^2=4x,\quad x=4,\quad y=0.$ |
| **29.** | 1) $y=x^2+1,\quad y=0,\quad x=-2,\quad x=2;$ | 2) $x\,y=2,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=2.$ |
| **30.** | 1) $x\,y=4,\quad 2x+y-6=0;$ | 2) $y^2=2x,\quad x^2=2y.$ |