Определение двойного интеграла

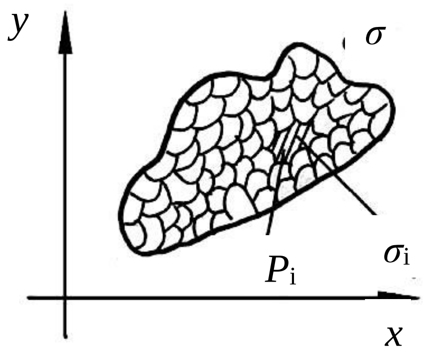

Рис. 1

Рассмотрим задачу о нахождении массы материальной двумерной пластинки σ, если известна плотность $\rho(x;y)$ в каждой ее точке. Разделим данную область произвольным образом на n частей (рис. 1) $P(x;y)$. В каждой элементарной части $\Delta\sigma_i$ выберем по одной точке $P_i(\xi_i;n_i)$ и вычислим плотность $\rho(\xi_i;n_i)$ в точке P_i. Тогда масса элементарной пластинки части $\Delta\sigma_i$ приближенно будет равна $\rho(\xi_i;n_i)\cdot\Delta\sigma_i$.

Для массы всей пластинки σ получаем

$$m \approx \sum_i \rho(\xi_i;n_i)\cdot\Delta\sigma_i\,. \qquad (1.1)$$

Приближение (1.1) будет тем точнее, чем мельче будет разбиение области σ на элементарные части, т.е. чем меньше будет наибольшее расстояние между произвольными точками любой элементарной области $\Delta\sigma_i$. Следовательно, можно принять, что

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i \rho(\xi_i;n_i)\cdot\Delta\sigma_i\,, \qquad (1.2)$$

где λ – наибольший из диаметров элементарных частей $\Delta\sigma_i$ (диаметр $\Delta\sigma_i$ – это наибольшее расстояние между произвольными ее точками).

Необходимость рассмотрения выражения вида (1.1) и предела (1.2) возникает при решении многих других физических и геометрических задач. В связи с этим дается следующее определение. Пусть функция $f(x;y)$ определена в некоторой области σ. Делим область σ на n элементарных частей $\Delta\sigma_i$. В каждой части $\Delta\sigma_i$ выбираем по одной точке $P_i(\xi_i;n_i)$ и составляем выражение

$$S_n = \sum_i f(\xi_i;n_i)\cdot\Delta\sigma_i\,. \qquad (1.3)$$

Определение 1. Выражение вида (1.3) называется *интегральной суммой для функции* $f(x;y)$ *в области* .

Обозначим через λ наибольший из диаметров элементарных областей $\Delta\sigma_i$ при разбиении области σ.

Определение 2. Если существует предел

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f\left(\xi_i; n_i\right) \cdot \Delta\sigma_i , \tag{1.4}$$

который не зависит от способа деления области σ на части $\Delta\sigma_i$ и выбора точек $P_i\left(\xi_i; n_i\right)$, то этот предел называется *двойным интегралом от функции* $f(x; y)$ *по области и обозначается* $\iint\limits_{\sigma} f(x; y)\, d\sigma$, или $\iint\limits_{\sigma} f(x; y)\, dxdy$. Здесь $f(x; y)$ называется *подынтегральной функцией;* σ *– областью интегрирования; x и y – переменными интегрирования;* $d\sigma$ *(или dxdy) – элементом площади.*

Таким образом, по определению,

$$\iint\limits_{\sigma} f(x; y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f\left(\xi_i; n_i\right) \cdot \Delta\sigma_i . \tag{1.5}$$

Функция $f(x; y)$ называется *интегрируемой* в области σ. Всякая *непрерывная в ограниченной замкнутой области* σ *функции* $f(x; y)$ *интегрируется в ней.* В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только непрерывных функций.

Двойной интеграл обладает следующими простейшими свойствами [1]:

1. $\iint\limits_{\sigma} f(x; y)dxdy = C\iint\limits_{\sigma} f(x; y)dxdy$.
2. $\iint\limits_{\sigma}\left(f_1(x; y) \pm f_2(x; y)\right)dxdy = \iint\limits_{\sigma} f_1(x; y)dxdy \pm \iint\limits_{\sigma} f_2(x; y)dxdy$.

3. Если область σ состоит из двух областей σ_1 и σ_2, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x; y)dxdy = \iint\limits_{\sigma_1} f_1(x; y)dxdy + \iint\limits_{\sigma_2} f_2(x; y)dxdy.$$

4. Если функции $f(x; y)$ и $g(x; y)$ интегрируемы на ограниченной области σ и $f(x; y) \le g(x; y)$ для всех $(x, y) \in \sigma$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x; y)dxdy \le \iint\limits_{\sigma} g(x; y)dxdy.$$

Следствие. Если $m \le f(x; y) \le M$ для всех $(x, y) \in \sigma$, то

$$m|\sigma| \le \iint\limits_{\sigma} f(x; y)dxdy \le M|\sigma| .$$

5. *Теорема о среднем.* Пусть σ – связная ограниченная область и пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на замыкании σ области σ. Тогда существует точка $(\zeta;\eta)\in\sigma$, для которой выполнено равенство

$$\iint_{\sigma} f(x;y)\,dxdy = f(\zeta;\eta)|\sigma|.$$

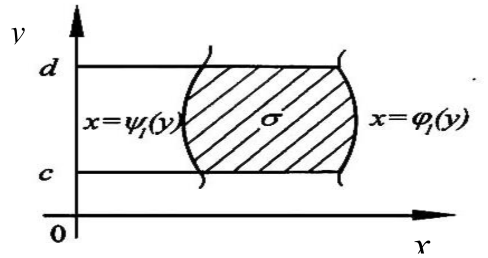

Рис. 4

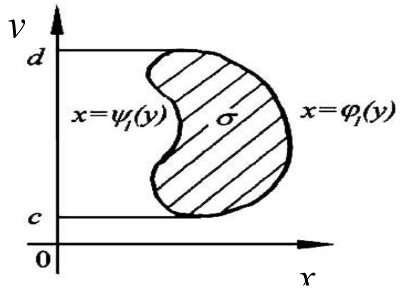

Рис. 5

Область на плоскости $x0y$ назовем *простой областью*:

1) относительно оси $0x$, если она ограничена сверху линией $y=\psi(x)$, снизу $y=\varphi(x)$ [функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны] и с боков отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ (рис. 2); в частных случаях один из этих отрезков (или оба вместе) могут превратиться в точку (рис. 3);

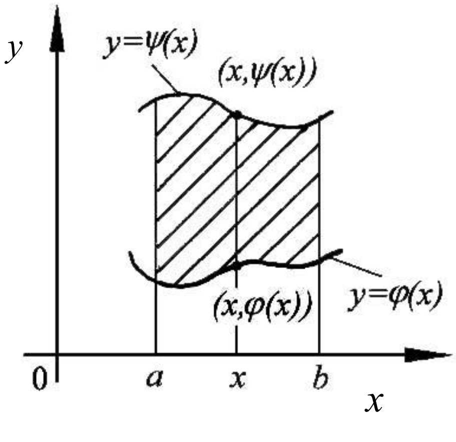

Рис. 2

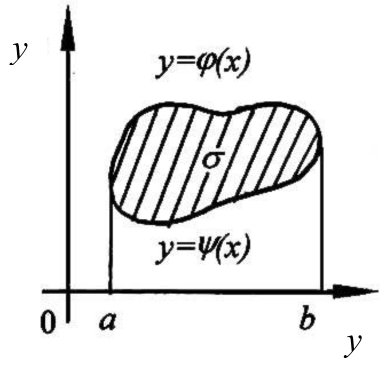

Рис. 3

2) относительно оси $0y$, если она ограничена слева линией $x=\psi_1(y)$, справа $x=\varphi_1(y)$ [функции $\psi_1(y)$ и $\varphi_1(y)$ непрерывны] и сверху и снизу отрезками прямых $y=d$ и $y=c$ (рис. 3, 4).

Теперь перейдем к непосредственному вычислению двойного интеграла. Для этого снова рассмотрим задачу о нахождении массы материальной двумерной пластинки σ.

Пусть материальная область σ ограничена снизу кривой $y=\varphi(x)$, сверху – кривой $y=\psi(x)$, с боков – прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 5), т.е.

является простой областью вида 1 относительно оси $0x$. Пусть далее функция $f(x;y)$ выражает плотность (т.е. «концентрацию массы») в точке $(x;y)$. Для некоторого x значения выделим материальный отрезок от точки $(x;\varphi(x))$ до точки $(x;\psi(x))$ и вычислим массу $m(x)$, сконцентрированную на этом отрезке, по формуле

$$m(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy$$

Далее, спроектируем нашу материальную пластинку σ на ось $0x$, получим материальный отрезок $[a;b]$, плотность которого в каждой точке x будет выражаться функцией $m(x)$. Следовательно, масса этого отрезка и всей области σ будет

$$m=\int_a^b m(x)dx=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy. \qquad (1.6)$$

С другой стороны, выше было доказано

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(\xi_i;n_i)\cdot\Delta\sigma_i=\iint_\sigma f(x;y)dxdy.$$

Таким образом, для вычисления двойного интеграла от функции $f(x;y)$ по области σ получим следующую формулу, сводящую ее вычисление к *повторному интегралу:*

$$\iint_\sigma f(x;y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy. \qquad (1.7)$$

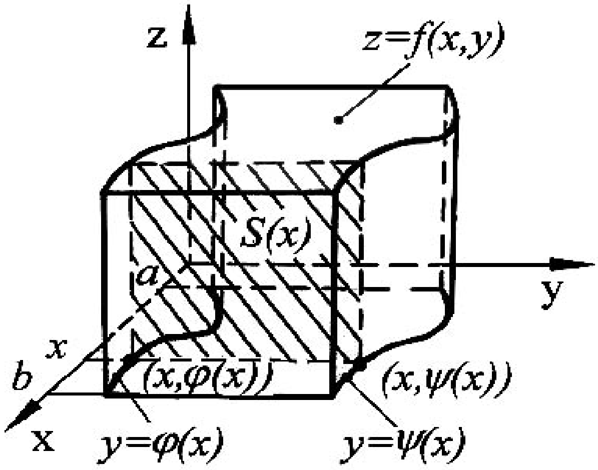

Рис. 6

Заметим, что в случае вычисления объема цилиндрических тел интеграл $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy$ дает площадь $S(x)$ поперечного сечения нашего тела (рис. 6), следовательно, весь объем V будет

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy\right)dx=$$
$$=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy. \qquad (1.8)$$

Если же область σ есть простая область вида 2, то всякая прямая, параллельная оси $0x$ и проходящая внутри отрезка $[a;b]$, пересекает границу в двух точках: $(\psi_1(y);y)$ и $(\varphi_1(y);y)$ (рис. 7). Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint_\sigma f(x;y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\varphi_1(y)} f(x;y)dx. \qquad (1.9)$$

Наиболее простой вид формулы (1.8) и (1.9) принимают в случае прямоугольной области σ, ограниченной прямыми $x=a$; $x=b$; $y=c$; $y=d$ (рис. 8):

$$\iint_\sigma f(x;y)dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)dx. \qquad (1.10)$$

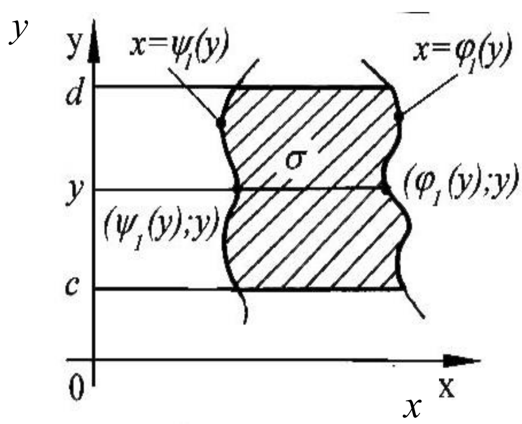

Рис. 7

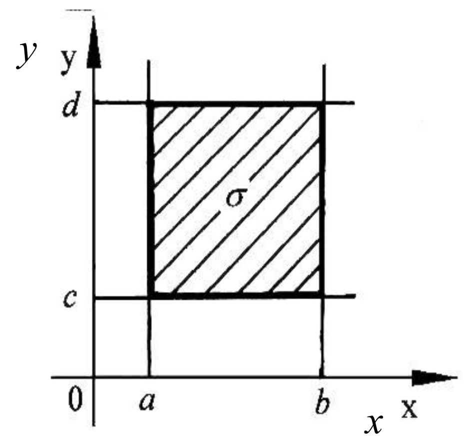

Рис. 8

Следует заметить, что если область σ не является простой областью, то ее разбивают на конечное число простых областей σ_1, σ_2, …, σ_n и при вычислении двойного интеграла по области σ используют третье свойство двойного интеграла.