Приложения двойного интеграла

1. Вычисление объёма цилиндрического тела

Рассмотрим задачу вычисления объемов цилиндрических тел [3].

Пусть требуется вычислить объем тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x;y)$ $\left(f(x;y) \geq 0\right)$, снизу – конечной замкнутой областью σ плоскости $0xy$ и с боков – цилиндрической поверхностью, построенной на границе области σ и имеющей образующие, параллельные оси $0z$ (рис. 21).

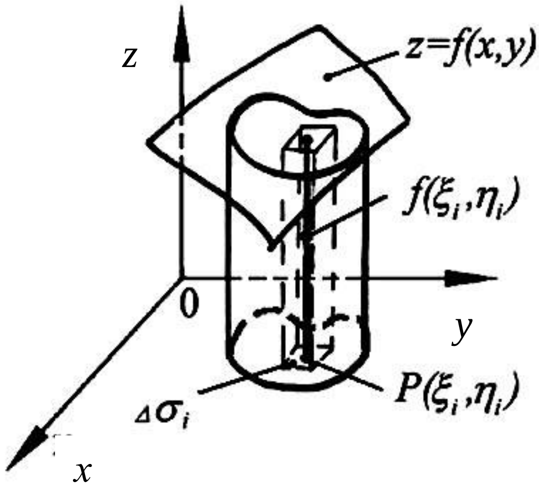

Рис. 21

Делим область σ на элементарные области $\Delta\sigma_i$. В каждой $\Delta\sigma_i$ выбираем по одной точке $P_i(\xi_i;n_i)$. Тогда объем прямого элементарного цилиндра, ограниченного сверху поверхностно $z = f(x;y)$ и снизу областью $\Delta\sigma_i$, приближенно равен $f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь соответствующей элементарной области. Для объема всего нашего цилиндрического тела получаем приближение

$$V \approx \sum_i f(\xi_i;n_i)\cdot\Delta\sigma_i . \qquad (1.18)$$

Приближение (1.18) будет тем точнее, чем меньше будет наибольший из диаметров λ элементарных областей $\Delta\sigma_i$. Следовательно, можно и в этом случае принять, что

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(\xi_i;n_i)\cdot\Delta\sigma_i . \qquad (1.19)$$

Весь объем V будет

$$V = \iint_\sigma f(x;y)dxdy. \qquad (1.20)$$

Пример 1. Вычислить объем цилиндрического тела, ограниченного снизу областью σ, по указанной на рис. 22, и сверху – плоскостью $z = x - y$.

Решение. Область интегрирования σ ограничена снизу кривой $\varphi(x) = 0$, сверху – кривой $\psi(x) = x^2$. Спроецировав σ на ось $0x$, получим отрезок $[0;1]$ Следовательно,

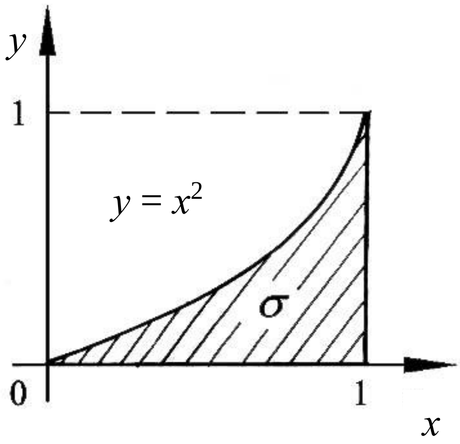

Рис. 22

$$V = \iint_{\sigma} f(x;y)dxdy = \iint_{\sigma}(x-y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x-y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(x\int_0^{x^2} dy - \int_0^{x^2} y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(xy\Big|_0^{x^2} - \frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2} \right) dx = \int_0^1 \left(x\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(x^2\right)^2 \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x^3 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}.$$

2. Масса материальной двумерной пластинки D

В §1 была получена формула

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i \rho(\xi_i; n_i)\cdot \Delta\sigma_i .$$

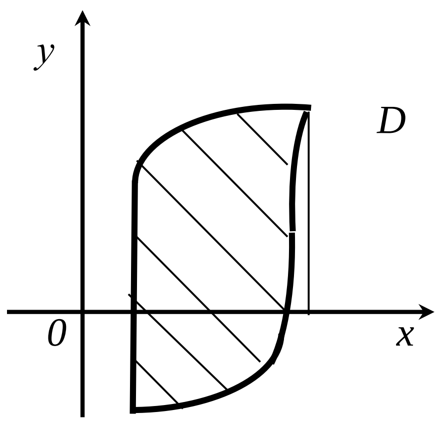

Рис. 25

Используя эту формулу, получим выражение для вычисления массы материальной двумерной пластинки D, если известна её плотность $\rho(x;y)$

$$m=\iint_D \rho(x;y)\,dxdy.$$

Эта формула даёт возможность вычислить массу неоднородной по поверхности плоской области (рис. 25).

Пример 2. Вычислить массу плоской пластины ограниченной линиями $x=0$; $y=0$; $y=1\text{-}x^2$; если ее плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки, $\rho(x;y)=x$ (рис. 26).

Решение.

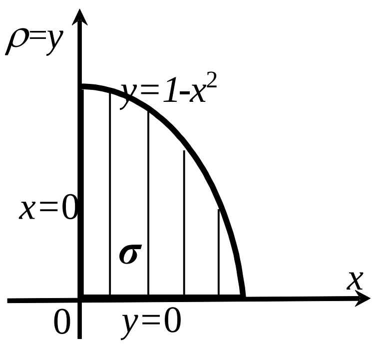

Рис. 26

$$m=\iint_\sigma x\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2} x\,dy=\int_0^1\left(x\int_0^{1-x^2}dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(xy\Big|_0^{1-x^2}\right)dx=\int_0^1 x\left(1-x^2\right)dx=\int_0^1\left(x-x^3\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

3. Площадь плоской фигуры

Если в формуле для вычисления массы материальной двумерной пластинки D заменить плотность на единицу, то получим формулу для вычисления площади плоской области D

$$S=\iint_D dxdy.$$

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры (рис. 29), ограниченной линиями: дугами окружностей

$$x^2+y^2=1\ \ x^2+y^2=9.$$

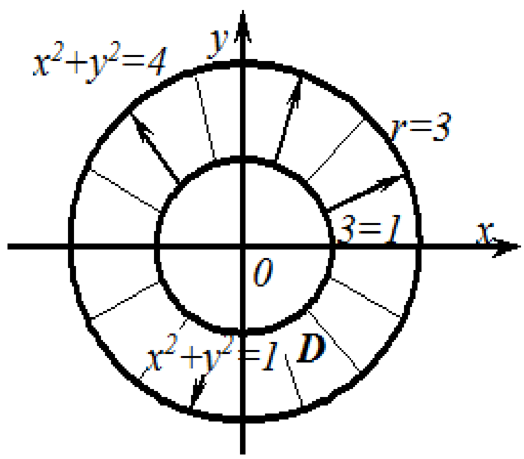

Рис. 29

Решение. Так как область интегрирования является кольцо $x^2+y^2=9$ м с центром в точке $O(0;0)$ (рис. 29), то введём полярные координаты.

Тогда уравнения окружностей примут вид

$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=9$;

$r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=9$; $r^2=9$;

$r=3$; $(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=1$;

$r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=1;\ r^2=1;\ r=1.$

Проведя лучи, исходящие из полюса(начала координат), увидим, что для них $r=1$ – линия входа, а $r=3$ – линия выхода, следовательно, r изменяется в границах

$$1\le r\le 3.$$

Тогда по формуле (3.16) получаем

$$S=\iint_{\sigma} dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^3 r\,dr\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left.\frac{r^2}{2}\right|_1^3 d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(9-1)d\varphi=4\int_0^{2\pi}d\varphi=4\varphi\big|_0^{2\pi}=8\pi.$$

4. Координаты центра тяжести плоской пластины D

Пусть $\rho(x;y)$ – плотность материальной двумерной пластинки D, тогда координаты её центра тяжести вычисляются по формулам

$$x_c=\frac{\iint\limits_{\sigma} x\rho(x;y)dxdy}{\iint\limits_{\sigma}\rho(x;y)dxdy};\qquad y_c=\frac{\iint\limits_{\sigma} y\rho(x;y)dxdy}{\iint\limits_{\sigma}\rho(x;y)dxdy}\qquad (1.\,21)$$

Пример 4. Вычислить координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями x=0; y=0; y=1–x^2; ρ = const (рис. 30).

Решение. Воспользуемся формулой (1.23). Для этого необходимо вычислить массу материальной пластинки. Область интегрирования σ ограничена снизу кривой $\varphi(x)=0$, сверху – кривой $\psi(x)=1-x^2$. Спроецировав, σ на ось $0x$, получим отрезок $[0;1]$. Следовательно, $0\le x\le 1$. По формулам для вычисления массы плоской пластинки и формуле (1.6) при $f(x;y)=\rho(x;y)=\text{const}=\rho$ получим выражение

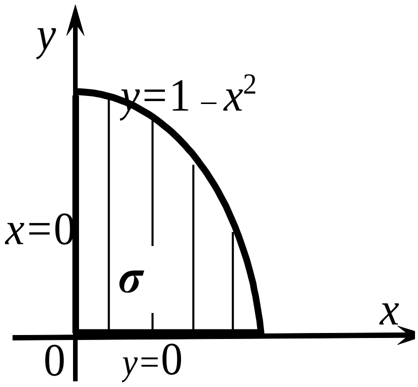

Рис. 30

$$m=\iint_{\sigma}\rho dxdy=\rho\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}dy=\rho\int_0^1\left(\int_0^{1-x^2}dy\right)dx=$$

$$=\rho\int_0^1\left(y\big|_0^{1-x^2}\right)dx=\rho\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=\rho\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{2}{3}\rho.$$

Вычислим интегралы, стоящие в числителях формулы (1.21)

$$\iint\limits_{\sigma} x\rho dxdy = \rho\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2} xdy = \rho\int_0^1\left(x\int_0^{1-x^2} dy\right)dx = \rho\int_0^1\left(xy\Big|_0^{1-x^2}\right)dx = \rho\int_0^1 x\left(1-x^2\right)dx =$$

$$= \rho\int_0^1 (x - x^3)dx = \rho\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\rho.$$

$$\iint\limits_{\sigma} \rho ydxdy = \rho\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2} ydy = \left[\int_0^{1-x^2} ydy = \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x^2} = \frac{\left(1-x^2\right)^2}{2} = \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right] =$$

$$= \rho\int_0^1\left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)dx = \rho\left(\frac{1}{2}x - x^2 + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{15}\rho.$$

Тогда окончательно получаем

$$x_c = \frac{\iint\limits_{\sigma} x\rho(x;y)dxdy}{\iint\limits_{\sigma} \rho(x;y)dxdy} = \frac{\frac{1}{4}\rho}{\frac{2}{3}\rho} = \frac{3}{8}\ ; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_{\sigma} y\rho(x;y)dxdy}{\iint\limits_{\sigma} \rho(x;y)dxdy} = \frac{\frac{4}{15}\rho}{\frac{2}{3}\rho} = \frac{2}{5},$$

т. е. центром тяжести является точка с координатами $C\left(\frac{3}{8};\frac{2}{5}\right)$.