Замена переменных в двойном интеграле

При вычислении двойных интегралов иногда бывает полезно сделать замену переменных. Пусть

$$\begin{cases} u = u(u,v); \\ v = v(u,v) \end{cases} \qquad (1.12)$$

– функции, определенные на всей плоскости $x0y$ или в некоторой ее области σ и имеющие непрерывные частные производные в области σ. Допустим также, что систему уравнений (1.12) можно однозначно разрешить относительно x и y [2]:

$$\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v), \end{cases} \qquad (1.13)$$

тогда каждой точке $M(x,y)$ из области σ будет взаимно - однозначно соответствовать пара чисел (u,v), называемых криволинейными интегралами этой точки. Если область σ расположена в той части плоскости $x0y$, в которой введены криволинейные координаты u, v, то справедлива следующая формула:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\sigma'} f[x(u,v), y(u,v)]|J(u,v)|dudv, \qquad (1.14)$$

где σ' – область изменения криволинейных координат u и v, отвечающая области σ; $J(u,v)-$ преобразования (1.13),

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.$$

В частности, в полярных координатах формула (1.13) имеет вид (рис. 13)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (1.15)$$

Система (1.15) осуществляет переход от прямоугольных координат x и y к полярным координатам r и φ при условии, что полюс кривой помещен в начале координат и полярная ось направлена вдоль оси $0x$ (рис. 14). В этом случае $|J| = r$ формула (1.14) принимает вид

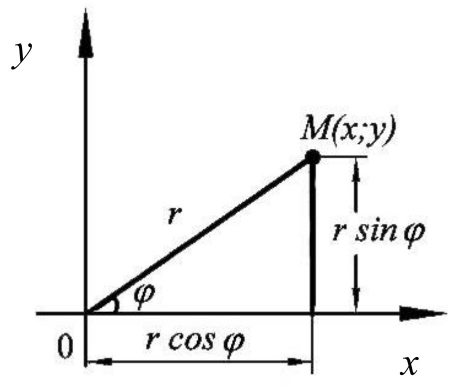

Рис. 13

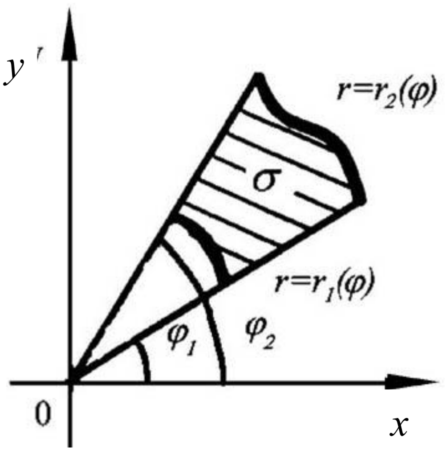

Рис.14

$$\iint_{\sigma} f(x,y)dxdy = \iint_{\sigma'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi dr.$$

Если область σ ограничена лучами, образующими с полярной осью углы φ_1 и φ_2 $(\varphi_1 < \varphi_2)$, кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) < r_2(\varphi))$ (см. рис. 14), то соответствующие этой области полярные координаты изменяются в пределах

$$\sigma'\{\varphi_2 \le \varphi \le \varphi_1; r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}$$

и тогда

$$\iint_{\sigma} f(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr. \tag{1.16}$$

Если область σ охватывает начало координат, то

$$\iint_{\sigma} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr, \tag{1.17}$$

где $r = r(\varphi) -$ полярное уравнение кривой, ограничивающее область σ (рис. 15).

Формулы (1.16) и (1.17) очень удобно использовать при решении задач, когда область σ есть круг или сектор круга.

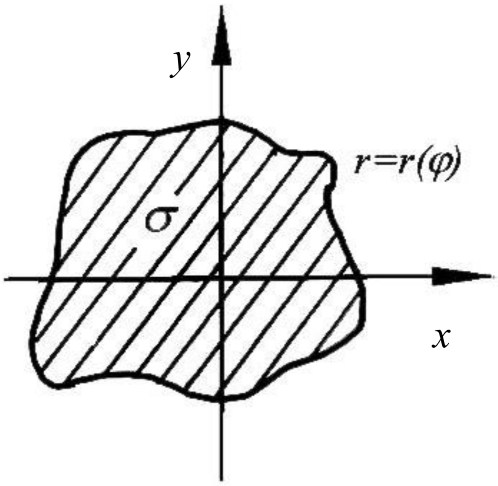

Рис. 15

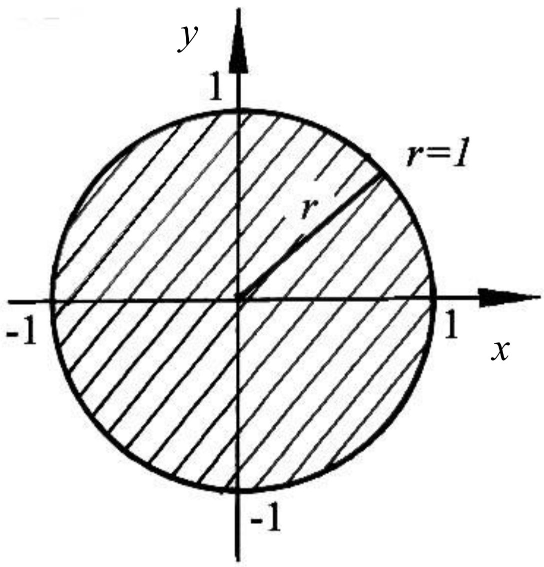

Рис. 16

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$, если область σ ограничена окружностью $x^2+y^2=1$ (рис. 16).

Решение. Область σ есть круг радиусом 1 с центрами в начале координат. Введем полярные координаты. В полярных координатах уравнение окружности примет вид $(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=1$, или $r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=1$ [см. формулы (1.15)], т.е. $r^2=1$ или $r=1$.

Тогда по формуле (1.17) получаем

$$\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\sqrt{1-(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}\,r\,dr\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\right)d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}}r\,dr\right)d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_1^0 t^{\frac{1}{2}}\,dt\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^0 d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{0}{1.5}-\frac{1}{1.5}\right)d\varphi=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2}{3}\pi.$$