. Числовые ряды. Основные понятия и свойства

Определение 1. Числовой ряд есть алгебраическая сумма бесконечного числа слагаемых. Всякий ряд имеет, таким образом, вид

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \ldots . \qquad (1.1)$$

Причем написанное выражение не имеет последнего члена, но за каждым из слагаемых имеется следующее слагаемое.

Для сокращенного обозначения рядов используется знак суммирования $\sum$, а именно:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1.2)$$

Определение 2. Числа a_1, a_2,..., a_n,... называются членами ряда (1.2); a_n называется ***общим членом ряда***.

Рассмотрим некоторые примеры рядов. В курсе математики средней школы мы уже встречались с понятием ряда, который получается при вычислении суммы членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n . \qquad (1.3)$$

Определение 3. Ряд (1.3) называется ***рядом геометрической прогрессии***.

Если, например, $a = 1$, $q = \dfrac{1}{5}$, то получим ряд

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}. \qquad (1.4)$$

Определение 4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (1.5)$$

называется ***гармоническим рядом***.

Определение 5. Сумма первых n членов ряда называется ***частичной суммой ряда.***

Если частные суммы ряда становятся все более и более точными приближениями некоторого числа, то ряд мы назовем сходящимся. То есть, если существует число S, для которого S_1, S_2,..., S_n,...являются приближенными значениями, то S называют ***суммой ряда*** и пишут

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = S . \qquad (1.6)$$

Определение 6. Ряд (4.1) называется сходящимся, если последовательность его частных сумм (4.6) сходится, т.е. если существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S . \qquad (1.7)$$

Если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, то ряд называется ***расходящимся*** и ему не приписывается никакое числовое значение [3].

Пример 1. Исследуем на сходимость ряд геометрической прогрессии (1.3).
Решение.

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \frac{a\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q} =$$

$$= \frac{a - aq^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^{n+1}}{1-q}. \qquad (1.8)$$

Рассмотрим q, удовлетворяющее условию $|q| < 1$.
Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^{n+1}}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{aq^{n+1}}{1-q} =$$

$$= \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot 0 = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, при $|q| < 1$ ряд (1.3) сходится и его сумма S равна $\frac{a}{1-q}$. В частности, сумма ряда (1.4) равна $S = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$.

Если $|q| \geq 1$, то ряд (1.3) сходится лишь при $a = 0$. В этом случае $S_n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. Если $a \neq 0$ и $|q| \geq 1$, то из (1.8) следует, что

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-q^{n+1}\right) = \frac{a}{1-q}\cdot\infty = \infty$, т.е. ряд (1.3) расходится.

Если $a \neq 0$ и $|q| = 1$,то получим при $q = 1$ ряд

$$a + a + \ldots + a + \ldots, \qquad (1.9)$$

а при $q = -1$ ряд

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n+1}a + \ldots. \qquad (1.10)$$

Для ряда (1.9) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a = a\lim\limits_{n\to\infty} n = a\cdot\infty = \infty$, т.е. ряд является расходящимся.

Для ряда (1.10) $S_{2n} = 0$, $S_{2n-1} = a$, следовательно, последовательность частичных сумм a, 0, a, 0,... не имеет предела.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}.$$

Решение. Для частных сумм данного ряда имеем

$$S_n = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots =$$

$$= \ln \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = \ln(n+1).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \ln(n+1) = \infty$.

Согласно определению 6 ряд является расходящимся.

Свойства сходящихся рядов, подобные свойствам сумм

Начнем с доказательства нескольких простых теорем, которые, по существу, являются непосредственным применением простейших теорем о пределах последовательностей к последовательностям частичных сумм рядов.

Рассмотрим свойства сходящихся рядов.

Теорема 1. Если ряд (1.2) сходится и его сумма равна S, то для произвольного числа c ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots. \qquad (1.11)$$

Так же сходится и его сумма, равная cS. Если же ряд (1.2) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (1.11) расходится.

Доказательство. Пусть ряд (1.2) сходится и $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$. Обозначим частные суммы ряда (1.11) через S_n.

Тогда

$$S'_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cS_n. \qquad (1.12)$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} S'_n = \lim_{n \to \infty} cS_n = c \lim_{n \to \infty} S_n = cS_n.$$

Пусть теперь ряд (1.2) сходится, $c \neq 0$, и допустим противное, что ряд (1.11) сходится, причем $\lim\limits_{n \to \infty} S'_n = S'$. Тогда, учитывая (1.12), имеем $S' = \lim\limits_{n \to \infty} cS_n = c \lim\limits_{n \to \infty} S_n$, откуда $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{S'}{C}$, что противоречит нашему условию о расходимости ряда (1.2), что и требовалось доказать.

Пример 1. Известно, что ряд (1.4) сходится. Показать, что сходится и ряд

$$5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{5^{n-4}} + \ldots.$$

Решение. Последний ряд получается из ряда (2.4) умножением на $c = 5^4$, следовательно, он сходится согласно теореме 1.

Теорема 2. Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.13)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (1.14)$$

сходятся и их суммы равны соответственно S' и S'', то и каждый из двух рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right)=\left(a_1 \pm b_1\right)+\left(a_2 \pm b_2\right)+\ldots+\left(a_n \pm b_n\right)+\ldots \quad (1.15)$$

сходится и сумма каждого равна соответственно $S' \pm S''$.

Другими словами, ***сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать***.

Доказательство. По условию имеем $S' = \lim_{n\to\infty} S_n'$, $S'' = \lim_{n\to\infty} S_n''$, где

$$S' = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ S'' = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Пусть $S_n = \left(a_1 \pm b_1\right)+\left(a_2 \pm b_2\right)+\ldots+\left(a_n \pm b_n\right)$, $n = 1, 2, \ldots,$ – частичная сумма ряда (2.15). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n' \pm S_n''\right) = \lim_{n\to\infty} S_n' \pm \lim_{n\to\infty} S_n'' = S' \pm S''.$$

Следовательно, каждый из рядов (1.15) сходится и сумма каждого равна соответственно $S = S' \pm S''$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n} = 2+\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{6^n}+\ldots$$

и если он сходится, найти его сумму S.

Решение. Данный ряд можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= (1+1)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots$$

Так как ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots.$$

являются рядами геометрической прогрессии, его знаменателями, меньшими единицы, то они сходятся и их суммы равны соответственно $S' = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$, $S'' = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ (см. пример 1).

Следовательно, данный ряд сходится и его сумма равна

$$S = S' + S'' = \frac{3}{2}+2 = \frac{7}{2}.$$

Без доказательства сформулируем следствие.

Следствие 1. Разность сходящихся рядов есть ряд сходящийся.

Следствие 2. Сумма расходящихся рядов есть ряд расходящийся.

Пример 3. Ряды

$$5+10+15+\ldots+5n+\ldots\,,\quad 3+6+9+\ldots+3n+\ldots$$

очевидно являются расходящимися, так как пределы их частных сумм равны бесконечности.

Их сумма

$$8+16+24+\ldots+8n+\ldots$$

и разность

$$2+4+6+\ldots+2n+\ldots$$

также расходящиеся ряды.

Без доказательств рассмотрим следующую теорему.

Теорема 3. Если в ряде (1.1) добавить или отбросить конечное число членов, то полученный ряд

$$a_1'+a_2'+\ldots+a_n'+\ldots \tag{1.16}$$

сходится или расходится одновременно с данным. В случае сходимости рассматриваемых рядов их суммы отличаются на сумму добавленных или отброшенных членов.

Пример 4. Как известно, ряд геометрической прогрессии (1.4) является сходящимся. Тогда сходящимся является, например, и ряд

$$5+\sqrt{2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{5^6}+\ldots+\frac{1}{5^{n+1}}+\ldots,$$

который получается из данного отбрасыванием конечного числа членов: $5+\sqrt{2}$ и добавлением слагаемых: $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}$.

§3. Необходимый признак сходимости ряда

При анализе рядов, полученных в результате моделирования какой-нибудь конкретной задачи, возникают два вопроса: во-первых, сходится ли полученный ряд, т.е. стабилизируется ли моделируемый процесс, и если он сходится, то, во-вторых, найти его сумму. Во многих практических задачах принципиальное значение имеет ответ на первый вопрос. Поэтому мы уделим основное внимание вопросу установления признаков сходимости рядов.

Рассмотрим необходимое условие сходимости ряда.

Теорема 1. Критерий Коши (необходимые и достаточные условия сходимости ряда).

Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при $n > N$ и любом $p > 0$, где p – целое число, выполнялось бы неравенство

$$\left|a_{n+p}-a_n\right| < \varepsilon.$$

Сформулируем критерий Коши для ряда.

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что при $n>N$ и любом $p>0$ выполнялось бы неравенство

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon .$$

Однако на практике применить непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому, как правило, используются более простые признаки сходимости:

1) **Теорема 2.** Если ряд (1.2) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю.

Доказательство. Пусть ряд (1.2) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Тогда имеем также $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Так как $a_n = S_n - S_{n-1}$, при $n > 1$ получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n - S_{n-1} \right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 .$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. ***Если n − й член стремится к нулю, еще не следует, что ряд сходится, ряд может и расходиться***.

Пример 1. Ряд $\frac{2}{4} + \frac{4}{7} + \frac{6}{10} + \ldots + \frac{2n}{3n+1} + \ldots$

расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3 + \frac{1}{n}} \right) = \frac{2}{3} \neq 0 .$$

При вычислении предела воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Подчеркнем, что рассматриваемый признак является только необходимым, но не является достаточным, т.е. ***из того, что член стремится к нулю, еще не следует, что ряд расходится***, ряд может и расходиться. Примером такого ряда может служить ***гармонический ряд*** (1.5). Он расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Чтобы доказать это, напомним, что

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e, \text{ т.е. } \left(\frac{n+1}{n} \right)^n < e . \qquad (1.17)$$

Логарифмируя неравенство (2.17) по основанию *e*, получим

$$\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^n < \ln l \text{ , или } n \ln \frac{n+1}{n} < 1.$$

Отсюда

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n} \quad \text{,или} \quad \ln(n+1)-\ln(n)<\frac{1}{n}. \qquad (1.18)$$

Подставим в (2.18) поочередно $n=1,2,3,...,n-1,n$. Получаем неравенства

$$\ln 2<1, \ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}, \ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},$$

\- -

$$\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n-1}, \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

Сложив почленно эти неравенства, получаем

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n},$$

т.е. частичная сумма гармонического ряда $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, следовательно, гармонический ряд расходится. Существует множество рядов, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, но которые тем не менее расходятся.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, т.е. необходимое условие сходимости выполнено. Частичная сумма

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}},$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\geq\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$, а это значит, что ряд расходится по определению.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+$… расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n=\begin{cases}0, & \text{при} \quad \text{четных} \quad n;\\ 1, & \text{при} \quad \text{нечетных} \quad n.\end{cases}$$

Однако при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n|<2$ при любом *n*.