Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. Признак сравнения

Существует довольно много примеров, позволяющих устанавливать сходимость или расходимость рядов. Все эти приемы называются *признаками сходимости.*

Эти приёмы обычно состоят в сравнении членов исследуемого ряда с членами другого ряда, поведение которого уже выяснено. Поэтому они называются *признаками сравнения*. Без доказательства сформулируем следующие признаки сравнения.

Теорема 1. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \ a_n \geq 0. \tag{1.19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \ b_n \geq 0. \tag{1.20}$$

Если $b_n \leq a_n$ для любого n, то из сходимости ряда (1.19)следует сходимость ряда (1.20) и сумма ряда (1.20) не превосходит сумму ряда (1.19); из расходимости ряда (1.20) следует расходимость ряда (1.19).

Замечание 1. Утверждение теоремы остается в силе, если существует натуральное N такое, что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $b_n \leq a_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\lg 2} + \frac{1}{\lg 3} + \ldots + \frac{1}{\lg n} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lg n}.$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим.

Имеем $\ln n \leq n$, значит, $\dfrac{1}{\ln n} \geq \dfrac{1}{n}$.

Так как гармонический ряд $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ расходится, то и данный ряд расходится.

Так как гармонический ряд расходится, то и данный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{n \cdot 5} + \frac{1}{n \cdot 5^2} + \frac{1}{n \cdot 5^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 5^n} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}.$$

Решение. Сравним данный ряд с рядом геометрической

прогрессии $1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots + \dfrac{1}{5^n} + \ldots$, который сходится. Имеем

$$\frac{1}{n \cdot 5^n} \leq \frac{1}{5^n}.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Несмотря на простоту формулировки признака сравнения, на практике более удобна следующая теорема, являющаяся его следствием.

Теорема 2. Если $a_n > 0, \quad b_n > 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = h,$ где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.

В качестве ряда, используемого для сравнения с данным, часто выбирают ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}; \quad p > 0$. Такой ряд называется *рядом Дирихле*. В примерах 2 и 4 было показано, что ряд Дирихле с $p = \dfrac{1}{3}$ и $p = \dfrac{1}{2}$ расходится. Можно показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ при $p>1$сходится, а при $p<1$ расходится.

Если $p = 1$, то получаем гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \ .$$

Гармонический ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3n^2+5n+1}$ с помощью предельного признака сравнения.

Решение. Так как при достаточно больших n $2n-1 \sim 2n$, а $3n^2+5n+1 \sim 3n^2$, то $u_n = \dfrac{2n-1}{3n^2+5n+1} \sim \dfrac{2n}{3n^2} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{n}$. Выберем для сравнения с данным гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, т.е. $b_n = \dfrac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\cdot n}{3n^2+5n+1} = \frac{2}{3} \quad \text{(см. [5])}.$$

Поскольку предел конечен и отличен от нуля и гармонический ряд расходится, то расходится и данный ряд.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3n+4}{4n^4+5n^2+1}$ с помощью предельного признака сравнения.

Решение. При достаточно больших n имеем $n^2+3n+4 \sim n^2$, $4n^4+5n^2+1 \sim 4n^4$, поэтому $b_n = \dfrac{n^2}{n^4} = \dfrac{1}{n^2}$ – общий член ряда, с которым будем сравнивать данный:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+3n+4\right) n^2}{4n^4+5n^2+1} = \frac{1}{4} \quad \text{(см. [5])}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле с $p=2$), поэтому данный ряд также сходится.

Признак сходимости Даламбера

Мы видели примеры весьма медленно сходящихся и весьма медленно расходящихся рядов. В их число прогрессии не входят: если в прогрессии знаменатель меньше единицы, то прогрессия довольно быстро сходится. С другой стороны, если знаменатель прогрессии не меньше единицы, то прогрессия расходится весьма быстро: частичные ее суммы, начиная с некоторого места, растут во всяком случае не медленнее, чем линейная функция.

В связи со сказанным едва ли можно надеяться, что основанный, по существу, только на свойствах прогрессий признак сходимости Даламбера окажется особенно чувствительным.

Теорема 1. Признак Даламбера (Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик). Пусть дан ряд (1.19) с положительными членами. Допустим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

существует и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho. \tag{1.21}$$

Тогда:

если $\rho<1$, то ряд (4.19) сходится;

если $\rho>1$, то ряд (4.19) расходится;

если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Доказательство. 1) Пусть $\rho<1$, в этом случае существует такая точка q на числовой оси $0x$, что $\rho<q<1$. Тогда, начиная с некоторого номера N, при $n\ge N$, все члены последовательности $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ будут находиться в окрестности $(0;q)$, т.е. для всех $n\ge N$ имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q<1.$$

Значит, для $n=N$, $N+1$, $N+2$,... получаем неравенства

$$\begin{cases} a_{N+1} < q a_N, \\ a_{N+2} < q a_{N+1} < q^2 a_N, \\ a_{N+3} < q a_{N+2} < q^2 a_{N+1} < q^3 a_N, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{N+K} < q a_{N+K-1} < q^K a_N, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Так как $0 < q < 1$, ряд из членов бесконечно геометрической прогрессии $a_N + a_N q + a_N q^2 + \dots$ сходится; следовательно, по замечанию 1 и ряд (1.19) сходится.

Пусть $\rho > 1$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Тогда, начиная с некоторого N, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ при $n \ge N$, т.е. при $n \ge N$, $a_{n+1} > a_n > a_{n-1} > \dots > a_N$.

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$.

Это противоречит необходимому признаку сходимости рядов. Таким образом, ряд (1.19) расходится, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если $\rho = 1$, то ряд (1.19) может быть как сходящимся, так и расходящимся (см. приведенные ниже примеры 4 и 5). В этом случае для решения вопроса о сходимости ряда необходимы дополнительные исследования.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Решение. Напомним,

$$(2n+1)! = (2\cdot 1+1)(2\cdot 2+1)(2\cdot 3+1)\dots(2(n-1)+1)(2n+1) =$$
$$= 3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots (2n-1)(2n+1).$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2(n+1)+1)!};\frac{1}{(2n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots \cdot (2n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots \cdot (2n+1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+3)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3} = 0 < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots+\frac{n}{5^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5^{n+1}}:\frac{n}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n\cdot 5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n\cdot 5^n\cdot 5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{5}=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Признак сходимости Коши

Сравнение рядов с прогрессиями приводит ещё и к другому признаку сходимости, принадлежащему Коши.

Теорема 1 (признак Коши). Пусть ряд (1.19) с неотрицательными членами. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ существует и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho. \qquad (1.22)$$

Тогда:

если $\rho<1$, то ряд (1.19) сходится;

если $\rho>1$, то ряд (1.19) расходится;

если $\rho=1$, то ряд (1.19) может быть как сходящийся, так и расходящийся (см. приведенные ниже примеры 4 и 5) [6].

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n=\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{11}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n+\ldots .$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}<1,$$

следовательно, по признаку Коши ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}=2+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots .$$

Решение. Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2{,}7$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e>1$, следовательно, по признаку Коши ряд расходится.

Интегральный признак сходимости

Как видно из доказательства признака Даламбера, а признак Коши доказывают аналогично, эти два признака дают ответ о сходимости только тех рядов, порядок малости членов которых не меньше, чем у ряда геометрической прогрессии, т.е. только для быстро сходящихся рядов. С другой стороны, эти признаки устанавливают расходимость только таких рядов, у которых общий член даже не стремится к нулю. Эти признаки, следовательно, являются слишком грубыми. Они неприменимы к рядам с медленно растущими частичными суммами, каким является, например, гармонический ряд.

Сформулируем сейчас признак, который в некоторой степени восполняет этот пробел.

Теорема 1 (интегральный признак). Пусть дан ряд (1.19) с положительными членами, причем $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>\ldots$и $f(n)-$такая непрерывная монотонно убывающая функция, что $f(n)=a_n$. Тогда данный ряд и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$одновременно сходится или расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots\quad \alpha>0,\ \alpha\neq 1.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$, $x\geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n)=\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, следовательно, можно применить интегральный признак. При $\alpha\neq 1$ имеем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}x^{-\alpha}dx=\left(\lim_{M\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^M\right)=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}\left(M^{1-\alpha}-1^{1-\alpha}\right)\right)=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(M^{1-\alpha}-1\right).$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая:

1) $1-\alpha<0$, т.е. $\alpha>1$, или $\alpha-1>0$; следовательно, $M^{1-\alpha}=\dfrac{1}{M^{\alpha-1}}$ стремится к нулю, если M стремится к бесконечности. Тогда $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^\alpha}=\dfrac{1}{1-\alpha}\lim\limits_{M\to\infty}\left(\dfrac{1}{M^{\alpha-1}}-1\right)=\dfrac{-1}{1-\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$,

таким образом, при $\alpha>1$ данный ряд сходится.

В частности, ряд $1+\dfrac{1}{2^{\frac{7}{4}}}+\dfrac{1}{3^{\frac{7}{4}}}+\ldots+\dfrac{1}{n^{\frac{7}{4}}}+\ldots$ сходится, т.к. $\alpha=\dfrac{7}{4}>1$.

$1-\alpha>0$, т.е. $\alpha<1$. Тогда $M^{1-\alpha}$ неограниченно возрастает при M, стремящемся к бесконечности, следовательно,

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(M^{1-\alpha}-1\right)=\infty$$

и данный ряд расходится.

В частности, ряд $1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$ расходится, так как $\alpha=\dfrac{1}{3}<1$.