Степенные ряды. Определение. Область сходимости

Определение 1. ***Степенным рядом*** называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ a_n(x-x_0)^n + \ldots, \qquad (2.7)$$

где $x-$независимая переменная; x_0-фиксированное число; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots -$постоянные коэффициенты.

Если в ряде (2.7) положить $x=a$, где $a-$некоторое число, то получим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-x_0)^n = a_0 + a_1(a-x_0) + a_2(a-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ a_n(a-x_0)^n + \ldots . \qquad (2.8)$$

Определение 2. Степенной ряд (2.7) ***называется сходящимся в точке*** a, если числовой ряд (2.8), полученный из ряда (2.7) подстановкой $x=a$, является сходящимся рядом. При этом a называется ***точкой сходимости ряда*** (2.7).

Пример 1. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n} = 1 + \frac{x+1}{5} + \frac{(x+1)^2}{5^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{5^n} + \ldots \qquad (2.9)$$

сходится в точке $x=0$ и расходится в точке $x=24$. Действительно, подставляя в (2.9) $x=0$, получим числовой ряд

$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots,$ который, как сумма членов ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{5}$, сходится. Данный степенной ряд расходится в точке $x=24$, так как числовой ряд $1+5+5^2+\ldots+5^n+\ldots$ является расходящимся, в силу невыполнения необходимого условия сходимости числового ряда.

Определение 3. Множество всех точек сходимости степенного ряда (2.7) называется ***областью сходимости ряда***.

Переходим к выяснению структуры области сходимости степенного ряда.

Если произвести замену $x-x_0=z$, то степенной ряд (2.7) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots .$$

Следовательно, при изучении степенных рядов мы можем ограничиться степенными рядами вида

$$. \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (2.10)$$

Заметим, что любой степенной ряд (2.10) сходится в точке $x = 0$, действительно, если подставить в (2.10) $x = 0$, получим ряд, сумма которого равна a_0. Таким образом, точка $x = 0$ входит в область сходимости любого степенного ряда (2.10).

Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда

Теорема 1 (Теорема Абеля. Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик). *Если степенной ряд* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при* $x = x_1$ *, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| < |x_1|$.

Доказательство. По условию теоремы, так как члены ряда ограничены, то

$$\left|a_n x_1^n\right| \le k,$$

где k– некоторое постоянное число. Справедливо следующее неравенство:

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_1^n\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \le k \left|\frac{x}{x_1}\right|^n .$$

Из этого неравенства видно, что при $x < x_1$ численные величины членов нашего ряда будут меньше (во всяком случае не больше) соответствующих членов ряда правой части записанного выше неравенства, которые образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии $\left|\frac{x}{x_1}\right|$ по условию теоремы меньше единицы, следовательно, эта прогрессия представляет собой сходящийся ряд.

Поэтому на основании признака сравнения делаем вывод, что ряд $\sum \left|a_n x^n\right|$ сходится, а значит, ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно.

Таким образом, если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке x_1, то он абсолютно сходится в любой точке интервала длины $2|x_1|$ с центром в точке $x = 0$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится.

Рассмотрим довольно часто встречающиеся степенные ряды (2.10), для которых, начиная с некоторого номера, все $a_n \neq 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$. Вопрос о сходимости таких рядов может быть решен с помощью признака Даламбера, примененного к ряду

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots, \tag{2.11}$$

составленному из модулей членов ряда (2.10). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell. \tag{2.12}$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\dfrac{1}{\ell};\dfrac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \dfrac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \dfrac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд (2.10) сходится при любом x;

в) если $\ell = \infty$, то ряд (2.10) сходится лишь при $x = 0$.

Доказательство. Применяя признак Даламбера к ряду (2.11), имеем (при $\ell \neq +\infty$)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|x|}{|a_n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot\ell,$$

откуда следует, что ряд (2.11) сходится, если

$$\rho = |x|\cdot\ell < 1, \tag{2.13}$$

и расходится, если

$$\rho = |x|\cdot\ell > 1.$$

а) Допустим, что $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$. Тогда из (2.13) получаем $|x| < \dfrac{1}{\ell}$, т.е. $-\dfrac{1}{\ell} < x < \dfrac{1}{\ell}$. Таким образом, в интервале $\left(-\dfrac{1}{\ell};\dfrac{1}{\ell}\right)$ ряд (2.11) сходится, а следовательно, ряд (2.10) в этом интервале сходится абсолютно.

В ходе доказательства признака Даламбера для числовых рядов с положительными членами было установлено, что если $\rho > 1$, то общий член исследуемого ряда не стремится к нулю. Следовательно, для каждого фиксированного x, при котором $|x| \cdot \ell > 1$, общий член $\left|a_n x^n\right|$ ряда (2.11) не стремится к нулю. Отсюда следует, что общий член $a_n x^n$ ряда (2.10) не стремится к нулю, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$ ряд (2.10) расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

б) Если $\ell = 0$, то $|x| \cdot \ell = 0 < 1$. Тогда, по признаку Даламбера, ряд (2.11) сходится для любого x, а следовательно, ряд (2.10) сходится абсолютно также для любого x, т.е. в интервале $(-\infty; \infty)$.

в) В случае $\ell = \infty$ при $x \neq 0$ имеем $\rho = +\infty$ и ряд (2.10) расходится для любого $x \neq 0$, так как и в этом случае его общий член не стремится к нулю.

Если рассмотреть ряды, для которых существует $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, то вопрос о сходимости таких рядов может быть решен применением к ряду (2.11) признака Коши. Сформируем тогда без доказательства следующую теорему.

Теорема 3 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell. \tag{2.14}$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell}; \frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд (2.10) сходится при любом x;

в) если $\ell = \infty$, то ряд (2.10) сходится лишь при $x = 0$[11].

Определение. Число R называется ***радиусом сходимости*** ряда (2.10), если при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (2.10) сходится, а при всех x, для которых $|x| > R$, ряд (2.10) расходится.

Из теорем 2 и 3 следует, что в случае, когда $\ell \neq 0$ и $R \neq +\infty$, имеет место равенство $R = \frac{1}{\ell}$. Условимся считать $R = 0$ для рядов, расходящихся при всех $x \neq 0$, и $R = +\infty$ для рядов, сходящихся при любых x.

Из этого определения и теорем 2 и 3 следует

$$R=\frac{1}{\ell}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{2.15}$$

или

$$R=\frac{1}{\ell}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}. \tag{2.16}$$

Заметим, что вопрос о сходимости ряда (2.10) в точках $x=+R$ и $x=-R$ решается дополнительными исследованиями.

Таким образом, для области сходимости ряда (2.10) возможны следующие случаи.

1. Ряд (2.10) сходится только при $x=0$. Область сходимости состоит из одной точки $x=0$, $R=0$.

2. Ряд (2.10) не имеет точек расходимости. Область сходимости совпадает со всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, $R=+\infty$.

3. Ряд (2.10) имеет как отличные от нуля числа точки сходимости, так и точки расходимости. В зависимости от данного ряда область сходимости является одним из промежутков

$$(-R;R),\ [-R;R),\ (-R;R],[-R;R],$$

где $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, или $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$.

Определение. Независимо от того, какой именно случай имеет место, интервал $(-R;R)$ называется ***интервалом сходимости ряда*** (2.10).

Следствие 1. Область сходимости ***степенного ряда либо совпадает с его интервалом сходимости, либо получается из этого интервала добавлением одной или обеих граничных точек.***

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$1+x+2!x^2+3!x^3+\ldots+n!x^n+\ldots\ .$$

Решение. По формуле (2.15) имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Данный ряд сходится только в точке $x=0$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{5}+\frac{x^2}{5^2}+\frac{x^3}{5^3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{5^n}+\ldots\ .$$

Решение. К этому ряду формула (2.15) неприменима, так как отсутствуют четные степени переменной x, т.е. $a_{2k}=0$, $k=1, 2, 3, \ldots$.

Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}}:\frac{x^{2n-1}}{5^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}\cdot 5^n}{x^{2n-1}\cdot 5^{n+1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n-1}\cdot x^2\cdot 5^n}{x^{2n-1}\cdot 5^n\cdot 5}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{5}.$$

Данный ряд сходится для $\frac{x^2}{5}<1$, или $x^2<5$, т.е. $|x|<\sqrt{5}$, следовательно, $x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Проверим сходимость на концах интервала. При $x=\pm\sqrt{5}$ получаем ряды

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{5^2}\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^5}{5^3}\pm\ldots\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{\left(\sqrt{5}\right)^n}\pm\ldots, \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{5}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\ldots\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\ldots, \text{ которые, очевидно, расходятся.}$$

Следовательно, областью сходимости будет $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n=\left(\frac{1+1}{4}\right)\cdot x+\left(\frac{2+1}{4\cdot 2}\right)^2\cdot x^2+\left(\frac{3+1}{4\cdot 3}\right)^3\cdot x^3+$$

$$+\ldots+\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n+\ldots\ .$$

Решение. По формуле (2.16) имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n+1}{4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}=4,$$

т.е. $R=4$, ряд сходится в интервале $(-4;4)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot 4^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n\cdot 4^n}{4^n\cdot n^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который исследуем с помощью необходимого признака сходимости рядов. Имеем

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\ell\neq 0$, т.е. общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится. При $x=-4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot(-4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{(-1)^n 4^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

Итак, окончательно имеем: областью сходимости будет промежуток $(-4;4)$.

Замечание. Если степенной ряд имеет вид (2.7), то, как мы отмечали, подстановкой $x-x_0=z$ он приводится к степенному ряду вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots, \tag{2.17}$$

интервалом сходимости которого будет $(-R;R)$, т.е. $|z|<R$ или $|x-x_0|<R$, или $-R<x-x_o<R$,или $x_0-R<x<x_0+R$. Следовательно, интервалом сходимости ряда (2.7) будет $(x_0-R;x_0+R)$, а радиус сходимости ряда (2.17) и (2.7) совпадают.

Пример 4. Найти область сходимости степенного ряда

$$1+\frac{(x-3)}{2^3}+\frac{(x-3)^2}{3^3}+\frac{(x-3)^3}{4^3}+\ldots+\frac{(x-3)^n}{(n+1)^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)^3}.$$

Решение.

Здесь $x_0=3, a_n=\dfrac{1}{(n+1)^3}, a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1+1)^3}=\dfrac{1}{(n+2)^3}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^3}:\frac{1}{(n+2)^3}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^3}{(n+1)^3}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^3=1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x-3|<1$, т.е. при $-1<x-3<1$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots, \tag{2.18}$$

который является сходящимся как обобщенный гармонический с $\alpha=3$. При $x=2$ имеем $1-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}+\ldots$, который абсолютно сходится, т.к. сходится ряд (2.18). Следовательно, областью сходимости является отрезок $[1;3]$.