Разложение функции в степенные ряды. Ряд Тейлора

1. Коэффициенты Тейлора. Ряд Тейлора

Предположим, что функция раскладывается в степенной ряд в интервале $|x-x_0|\le R$:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots . \quad (2.28)$$

Найдем коэффициенты ряда (2.28), выразив их через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0. Для этого, полагая в (2.28) $x=x_0$, получим

$$f(x_0)=a_0. \quad (2.29)$$

По теореме о дифференцируемости степенных рядов из (2.28) находим

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots . \quad (2.30)$$

Полагая в (2.30) $x=x_0$, получим

$$f'(x_0)=a_1. \quad (2.31)$$

Дифференцируя обе части (2.30), находим

$$f''(x)=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+4\cdot 3a_4(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots . \quad (2.32)$$

Полагая в (2.32) $x=x_0$, получим

$$f''(x_0)=2\cdot 1a_2. \quad (2.33)$$

Продолжая дифференцировать полученный ряд и подставляя $x=x_0$, будем иметь

$$f'''(x_0)=3\cdot 2\cdot 1a_3,\ f^{IV}(x_0)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4,\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(x_0)=n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1a_n,\ldots\ldots,$$

или

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

где полагаем $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$. Из полученных формул и определим коэффициенты ряда (2.28):

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ldots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (2.34)$$

Определение 1. Числа $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n=0$, 1, 2,… называются ***коэффициентами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0***.

Подставим значения a_n из (2.34) в (2.28), получим

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (2.35)$$

Определение 2. Ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (2.36)$$

называется ***рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0***.

Из приведенных выше рассуждений следует.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (2.28), то это разложение единственно и совпадает с разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора функции в точке $x_0=0$.

Если в (2.36) полагать $x_0=0$, то получим ***ряд Маклорена для функции $f(x)$***

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \quad (2.37)$$

который является частным случаем ряда Тейлора.

Из приведенных выше рассуждений следует, что если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные любого порядка, то для нее можно составить ряд Тейлора или (при $x_0=0$) ряд Маклорена (2.35).

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***порождающей*** для соответствующего ряда.

2. Многочлены Тейлора. Формула Тейлора

Определение 4. Частичные суммы $S_n(x)$ ряда Тейлора (2.35) обозначаются через $T_n(x)$ и называются ***многочленами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0***.

Тогда ряд Тейлора функции $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+r_n(x)=T_n(x)+r_n(x), \quad (2.38)$$

где $r_n(x)-$остаток ряда.

Таким образом, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до $n-$го порядка включительно, то для нее можно составить многочлен Тейлора степени n. Хотя в ряд Тейлора эта функция может и не разлагаться. Для таких функций можно записать равенство

$$f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+R_n(x), \quad (2.39)$$

где $R_n(x)-$ разность между $f(x)$ и $T_n(x)$, т.е.

$$R_n(x)= f(x)-T_n(x). \quad (2.40)$$

Определение 5. Формула (2.39) называется ***формулой Тейлора***, а $R_n(x)$ называется ***остаточным членом формулы Тейлора***.

Рассматриваются различные выражения для остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора. Мы остановимся, без доказательства, на одном из них, известным под названием ***"остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа"***. Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 все производные до $(n+1)-$го порядка включительно,то для любого из x этой окрестности имеет место

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (2.41)$$

где t – некоторая промежуточная точка между x_0 и x. Тогда с учетом (4.62) формула Тейлора (4.60) примет вид

$$f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad (2.42)$$

Если $x_0=0$, то получим частный случай формулы Тейлора, ***формулу Маклорена***:

$$f(x)= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n +$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (2.43)$$

Пример 1. Написать формулу Маклорена для функции $f(x)=x^2e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа для $n=4$.

Решение. При $n=4$ из (2.42) имеем

$$f(x)= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{4}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{5}(t)}{5!}x^5.$$

Находим производные до порядка $4+1=5$ включительно:

$f'(x)=e^x x^2+2xe^x=\left(2x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f'(x)=e^x x^2+2xe^x=\left(2x+x^2\right)\cdot e^x$;

$$f''(x)=(2+2x)\cdot e^x+\left(2x+x^2\right)\cdot e^x=\left(2+4x+x^2\right)\cdot e^x;$$
$$f'''(x)=(4+2x)\cdot e^x+\left(2+4x+x^2\right)\cdot e^x=\left(6+6x+x^2\right)\cdot e^x;$$
$$f^{(4)}(x)=(6+2x)\cdot e^x+\left(6+6x+x^2\right)\cdot e^x=\left(12+8x+x^2\right)\cdot e^x;$$
$$f^{(5)}(x)=(8+2x)\cdot e^x+\left(12+8x+x^2\right)\cdot e^x=\left(20+10x+x^2\right)\cdot e^x.$$

Для нашего случая:

$$f(0)=0\cdot e^0=0,\ f'(0)=\left(2\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=0,$$
$$f''(0)=\left(2+4\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=2,$$
$$f'''(0)=\left(6+6\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=6,$$
$$f^{(4)}(0)=\left(12+8\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=12,$$
$$f^{(5)}(t)=\left(20+10\cdot t+t^2\right)\cdot e^t.$$

Следовательно, $x^2e^x=\dfrac{2x^2}{2!}+\dfrac{6x^3}{3!}+\dfrac{12x^4}{4!}+\dfrac{\left(20+10t+t^2\right)\cdot e^t}{5!}x^5$, или $x^2e^x=x^2+x^3+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{\left(20+10t+t^2\right)\cdot e^t}{5!}x^5$, где $|t|<|x|$, t и x одного знака.

3. Сходимость ряда Тейлора к порождающей функции

Теорема 2. Ряд Тейлора (2.36) сходится к порождающей функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда остаточный член $R_n(x)$ в формуле Тейлора в каждой точке окрестности стремится к нулю.

Доказательство. Пусть ряд (2.36) сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности x_0,т.е. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, где $S_n(x)-n-$я частичная сумма ряда (2.36), которая совпадает с многочленом Тейлора $n-$й степени $T_n(x)$ для функции $f(x)$, т.е. $S_n(x)=T_n(x)$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-T_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-S_n(x)\right)=$$
$$=f(x)-\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Докажем обратное, пусть $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}T_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-R_n(x)\right)=$$
$$=f(x)-\lim_{n\to\infty}R_n(x)=f(x)-0=f(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если ряд Тейлора (3.36) сходится к порождающей функции, то $R_n(x) = r_n(x)$, т.е. ***остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора***.

На основании теоремы 2 сформулируем теорему, которая дает простое достаточное условие сходимости ряда Тейлора к порождающей функции и может быть применима при разложении функции.

Теорема 3. Если все производные функции $f(x)$ ограничены в некоторой окрестности точки x_0 одним и тем же числом, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к ней, т.е. имеет место разложение.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots . \qquad (2.44)$$

4. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Ограничимся частным случаем $x_0 = 0$, т.е. рядами Маклорена, которые чаще используются на практике.

а) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

Заметим, что $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots,$ $f^{(n)}(x) = e^x$. Тогда

$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$

Следовательно, функция e^x сопоставляется в ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Для доказательства сходимости данного ряда к порождающей функции e^x нужно показать, что e^x вместе со всеми своими производными ограничена в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$.

Для данного x найдем интервал $(-h; h)$, содержащий число x, и обозначим $e^h = M$. Тогда для любой производной функции имеем $\left| f^{(n)}(x) \right| = e^x < e^h = M$

.

Отсюда по теореме 3 сумма ряда сходится, т.е. равна порождающей его функции на всей числовой прямой:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots . \qquad (2.45)$$

б) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \sin(x)}$

Найдем производные данной функции:

$f'(x) = \cos x$, $\quad f''(x) = -\sin x$, $\quad f'''(x) = -\cos x$, $\quad f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$, $f^{(6)}(x) = -\sin x$, $f^{(7)}(x) = -\cos x, \ldots$.

Вычислим значение функции и ее производных для $x_0 = 0$; $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\sin 0 = 0$,

$f'''(0) = -\cos 0 = -1$, $\quad f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$, $\quad f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$, $f^{(6)}(0) = -\sin 0 = 0, \ldots$.

Таким образом получаем, если n четное, т.е. $n = 2k$,

где $k = 0{,}1{,}2\ldots$, то $f^{(n)}(0) = \pm \sin 0 = 0$.

Если n нечетное, то рассмотрим случаи:

$$n = 4k + 1,\ n = 4k + 3,\ k = 0{,}1{,}2{,}\ldots .$$

Для первого случая имеем

$$f^{(n)}(0) = f^{(4k+1)}(0) = \cos 0 = 1.$$

Для второго случая имеем

$$f^{(n)}(0) = f^{(4k+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$$

Учитывая далее, что производные функции $\sin x$ ограничены на всей числовой прямой, по теореме 3 получаем

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots .$$

Отбросив члены с нулевыми коэффициентами, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots . \qquad (2.46)$$

Нетрудно показать, что согласно теореме 3 $\sin x$ равен сумме этого ряда на всей числовой оси, т.к. все производные функции $\sin x$ ограничены.

в) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$

Повторяя рассуждения и выкладки, аналогичные случаю функции $\sin x$, получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots . \qquad (2.47)$$

Учитывая далее, что производные функции $\cos x$ ограничены на всей числовой прямой, по теореме 3 получаем сходимость ряда (2.47) к порождающей его функции $f(x)$.

г) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \ln(1 + x)}$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots . \qquad (2.49)$$

Если $x = 3$, то получим числовой ряд

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \ldots ,$$

который является сходящимся, как гармонический. Таким образом, разложение (2.49) верно в промежутке $(-1;1]$.

д) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x)=\operatorname{arctg} x}$

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots, \qquad (2.51)$$

полученный ряд сходится при $x\in(-1;1]$. Действительно, подставим в (2.51) $x=1$ и, учитывая, что $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, получаем разложение

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\ldots,$$

которое является сходящимся числовым рядом и может быть использовано для приближенного вычисления π.

Замечание. При интегрировании ряда (2.50) воспользовались формулой $\int\limits_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x$.

е) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x)=(1+x)^{\alpha}}$,

где $\alpha-$ произвольное действительное число. Нетрудно показать, что функция $(1+x)^{\alpha}$ в интервале сходимости $(-1;1)$ представима рядом

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots\,. \qquad (2.52)$$

Более того, можно показать, что при $\alpha\geq 0$ разложение (2.52) верно и в обоих концах интервала $(-1;1)$, т.е. имеет место на отрезке $[-1;1]$, а при $-1<\alpha<0-$в правом конце, т.е. на полуинтервале $(-1;1]$.

Определение 6. Ряд (2.52) называется ***биноминальным рядом.***

Примеры практического применения степенных рядов

1.Вычисление значений функций

Пример 1. Вычислить число e, т.е. значение функции e^x при $x=1$, с точностью до 0,001 (если известно, что $e<3$).

Решение. Имеем

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\,.$$

Тогда

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

причем абсолютная погрешность этого приближения равна

$h=\left|r_n(x)\right|=\frac{e^t}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, где $|t|<|x|$. При $x=1$ получаем

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

При этом $h=\frac{e^t}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1}=\frac{e^t}{(n+1)!}$, где $0<t<1$,

но так как $e^t<e^1<3$, то $h<\frac{3}{(n+1)!}$.

Число n определим из равенства $\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001$.

Откуда $\frac{3}{(n+1)!}<10^{-3}$, т.е. $(n+1)!>3\cdot 10^3=3000$.

Если взять $n=5$, то $(5+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720<3000$.

Возьмем $n=6$, $(6+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=5040>3000$.

Следовательно,

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+$$

$$+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\approx$$

≈ 2.718.

2.Интегрирование функций

Пример 3. При изучении теории вероятности важную роль играет функция

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

называемая ***функцией Лапласа,*** или ***интегралом вероятностей***. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием нельзя, так как $\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ не выражается через элементарные функции.

Заменяя в разложении (2.45) x на $-\frac{x^2}{2}$, получаем

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}n!}+\ldots.$$

Это разложение, как и разложение для e^x, имеет место на всей числовой оси, поэтому его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}n!}\right)dx=$$

$$=\int_0^x dx+\frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx+\frac{1}{2^4\cdot 2!}\int_0^x x^4dx-\frac{1}{2^6 3!}\int_0^x x^6dx+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{24}\cdot n!}\int_0^x x^{2n}dx+\ldots=x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^4\cdot 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{2^6\cdot 3!\cdot 7}+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)}+\ldots\,.$$

Тогда

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^4\cdot 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{2^6\cdot 3!\cdot 7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)}+\ldots\right),$$

сходящимся на всей числовой прямой оси. Вычислить значение функции $F(x)$ очень просто, так как ряд быстро сходится.

3.Вычисление определенного интеграла

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1\frac{1-\cos 2x^2}{x}dx$ с погрешностью $h<0{,}0001$, где при $x=0$ значение подынтегральной функции принимается равным единице.

Решение. Из формулы (2.47), заменяя x на $2x^2$, получаем

$$\cos 2x^2=1-\frac{4x^4}{2!}+\frac{2^4x^8}{4!}-\frac{2^6x^{12}}{6!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n}}{(2n)!}+\ldots\,.$$

$$1-\cos 2x^2=\frac{4x^4}{2!}-\frac{2^4x^8}{4!}+\frac{2^6x^{12}}{6!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n}}{(2n)!}+\ldots\,.$$

Делением обеих частей последнего равенства на x находим

$$\frac{1-\cos 2x^2}{x}=\frac{4x^3}{2!}-\frac{2^4x^7}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n-1}}{(2n)!}+\ldots\,.$$

Это разложение, как и разложение для $\cos x$, имеет место на всей числовой оси, поэтому можно почленно интегрировать:

$$\int_0^1\frac{1-\cos 2x^2}{x}dx=\int_0^1\frac{4x^3}{2!}dx-\int_0^1\frac{2^4x^7}{4!}dx+\ldots+$$

$$+\int_0^1(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n-1}}{(2n)!}dx+\ldots=\frac{4\cdot x^4}{2!\cdot 4}\Big|_0^1-\frac{2^4\cdot x^8}{4!\cdot 8}\Big|_0^1+\frac{2^6\cdot x^{12}}{6!\cdot 12}\Big|_0^1-$$

$$-\frac{2^8x^{16}}{8!\cdot 16}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{135}-\frac{1}{2520}+\ldots\,.$$

Данный ряд является знакочередующимся, для которого остаток ряда по модулю не превосходит модуль первого члена остатка ряда. Таким образом, вычисления проводятся до тех пор, пока слагаемое по модулю не будет меньше 0,0001.

Так как $h = |r_n| = \left| -\frac{1}{2520} \right| < 0{,}0001$, то достаточно взять

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x^2}{x}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{135} \approx 0{,}1657\,.$$

4.Интегрирование дифференциальных уравнений

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения $y' = xy^2 + 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Это уравнение нелинейное, и поэтому подстановка вместо y его разложения в ряд

$$y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \ldots + a_n(x-1)^n$$

привела бы к сложным уравнениям для определения коэффициентов. Поэтому обычно поступают иначе.

Продифференцируем уравнение несколько раз подряд, рассматривая y как функцию от x:

$$y'' = y^2 + 2xyy',$$

$$y''' = 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' = 4yy' + 2x(y')^2 + 2xyy''$$

$$y^{IV} = 4(y')^2 + 4yy'' + 2(y')^2 + 4xy'y'' + 2yy'' + 2xy'y'' + 2xyy''' =$$

$$= 6(y')^2 + 6yy'' + 2xyy''' + 6xy'y''.$$

Подставляя во все уравнения и во все производные $x = 1$ и учитывая начальное условие $y(1) = 0$, последовательно найдем:

$$y'(1) = 1y^2(1) + 1 = 1,\ y''(1) = y^2(1) + 2\cdot 1\cdot y(1)\cdot y'(1) = 0^2 + 2\cdot 0\cdot 1 = 0,$$

$$y'''(1) = 4y(1)y'(1) + 2\cdot 1\cdot (y'(1))^2 + 2\cdot 1\cdot y(1)\cdot y''(1) =$$

$$4\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 0\cdot 0 = 2,$$

$$y^{IV}(1) = 6\cdot (y'(1))^6 + 6\cdot y(1)\cdot y''(1) + 2\cdot 1\cdot y(1)\cdot y'''(1) =$$

$$= 6\cdot 1 + 6\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 0\cdot 2 = 6, \ldots\,.$$

Следовательно, искомое решение записывается в виде ряда Тейлора в точке $x_0 = 1$:

$$y = (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots\,.$$

Полученный многочлен в окрестности точки $x = 1$ дает как угодно хорошее приближенное выражение решения.