Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Определение 1. Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются ***знакопеременными***.

Пусть дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad (1.23)$$

Рассмотрим ряд, состоящий из модулей всех членов ряда (1.23):

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| \ldots \quad (1.24)$$

Теорема 1. Если ряд (1.24) сходится, то сходится и ряд (1.23).

Доказательство. Так как ряд (1.24) сходится, то и сходится ряд (1.23), потому что все его члены либо меньше, либо равны членам ряда (1.24), и по признаку сравнения он является сходящимся.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Решение. Ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

сходится (см. пример 1, §7), следовательно, и данный ряд сходится.

Определение 2. Знакопеременный ряд (1.23) называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд (1.24), составленный из модулей его членов.

Определение 3. Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд

$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$, составленный из модулей его членов, расходится.

Теорема 1 показывает, что исследование сходимости знакопеременных рядов сводится к исследованию сходимости рядов с неотрицательными членами.

Мы ограничимся исследованием знакочередующихся рядов, являющихся частными случаями знакопеременных.

Определение 4. Ряд называется ***знакочередующимся***, если положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно. При исследовании таких рядов можно ограничиться знакочередующимися рядами вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \quad (1.25)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots -$положительные числа.

Приведем достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.

Теорема 2 (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд (1.25) сходится, если:

его члены убывают по модулю,

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots; \tag{1.26}$$

его общий член стремится к нулю,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.27}$$

При этом сумма S ряда (1.25) удовлетворяет неравенствам $0 \le S \le a_1$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно частные суммы ряда (1.25) с четным и нечетным числом слагаемых. Имеем

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Так как выполняется соотношение (1.26), выражения в скобках не отрицательны, следовательно, $S_{2n} \ge 0$.

Кроме того, последовательность S_{2n} не убывает при $n \to \infty$, ввиду того, что

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \ge S_{2n}.$$

С другой стороны, S_{2n} можно представить в виде

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Так как каждое выражение в скобках не отрицательно и a_n не отрицательно, то последовательность четных частичных сумм не убывает и ограничено сверху; значит, она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, причем $S \ge 0$.

Частные суммы S_{2m+1} можем представить в виде $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, отсюда

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} =$$
$$= S + 0 = S.$$

Следовательно, и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Так как $S_{2n} \ge 0$, то и $S \ge 0$, а из второго представления S_{2n} при $n > 1$ имеем $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) = b < a_1$.

Отсюда $0 \le S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \le b \le a_1$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots .$$

Решение. 1. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots . \qquad (1.28)$$

Для исследования знакоположительного ряда (1.28) воспользуемся интегральным признаком (см. теорему 1, §7). Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x\geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n)=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, следовательно, условие интегрального признака удовлетворено. Имеем

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\lim_{M\to\infty}\int_{1}^{M}x^{-\frac{1}{3}}dx=\lim_{M\to\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_{1}^{M}=\lim_{M\to\infty}\frac{3}{2}\left(M^{\frac{2}{3}}-1\right)=\infty,$$

так как $\lim\limits_{M\to\infty}M^{\frac{2}{3}}=\infty$.

Итак, ряд (1.28) расходится, т.е. исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Исследуем ряд на условную сходимость.

Воспользуемся признаком Лейбница. Имеем

$$1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}>\ldots>\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0.$$

Оба условия признака Лейбница выполняются, значит, ряд является условно сходящимся.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{3^n+1}=\frac{4}{4}-\frac{8}{10}+\frac{16}{28}+\ldots+\frac{(-2)^{n+1}}{3^n+1}+\ldots .$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n+1}=\frac{4}{4}+\frac{8}{10}+\frac{16}{28}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{3^n+1}+\ldots \qquad (1.29)$$

Для исследования знакоположительного ряда (1.29) воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+2}}{3^n+1}:\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+2}\cdot(3^{n+1}+1)}{2^{n+1}\cdot\left(3^n+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}\cdot 2\cdot 3^n\left(3+\frac{1}{3^n}\right)}{2^{n+1}\cdot 3^n\cdot\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\left(3+\frac{1}{3^n}\right)}{1+\frac{1}{3^n}}\right)=6,\ \text{т.к.}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0.$$

Следовательно, ряд (1.29) сходится, а исходный ряд является абсолютно сходящимся.

Пример 4. Исследовать данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots+(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}+\ldots\,. \quad (1.30)$$

Решение. Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots+\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}+\ldots\,.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{2}{2}}=$$

$$=1\neq 0,\ \text{т.к.}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, мы заключаем, что ряд (1.30) расходится. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся. Исследуем его на условную сходимость. Проверим выполнение первого условия признака сходимости Лейбница

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=1\neq 0.$$

Следовательно, предложенный ряд является расходящимся.

Условная сходимость знакочередующегося ряда является в среднем, если можно так выразиться, более широким фактом, чем сходимость ряда с положительными членами; поэтому и распознать ее оказывается в каком-то смысле легче.

Заметим, наконец, что признак Лейбница является не только достаточным, но и необходимым признаком сходимости для знакочередующихся рядов с монотонно убывающими членами: если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то на основании необходимого признака сходимости ряд

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots$$

сходиться не может.