Лекция №10-11 Тема 7.4. Ряды Фурье.

Понятие функционального пространства. Скалярное произведение. Норма функции. Ортогональные и ортонормированные системы функций. Ряды и коэффициенты Фурье. Теорема Дирихле. Разложение чётной и нечётной функции в ряд Фурье.

§10. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье

1. Представление функций при помощи других заданных функций

Часто при изучении функций появляется необходимость представления данной функции при помощи других функций, которые называются ***базовыми*** и свойства которых считаются известными. Пусть дана система базовых функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_n(x), \ldots .$$

Представить данную функцию $f(x)$ при помощи заданных функций означает разложить $f(x)$ в функциональный ряд

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots,$$

где коэффициенты c_i – действительные числа. Получив такое представление, можно аппроксимировать данную функцию при помощи частных сумм соответствующего функционального ряда. Выбор базовых функций определяется, прежде всего, задачей, которую необходимо решить и свойствами данной функции $f(x)$. Как мы видели в предыдущем параграфе, представление функции степенным рядом позволяет вычислить числовые значения функции, значения интегралов, находить решение дифференциальных уравнений.

В случае степенных рядов в качестве базовых служат функции

$$1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n, \ldots .$$

2. Тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье. Тригонометрический ряд Фурье

Если изучаемая функция является периодической (моделируется сложный процесс), то в качестве базовых, естественно, взяты тригонометрические функции вида

$$A\sin(kx+\alpha) = A\sin\alpha\cos kx + A\cos\alpha\sin kx = a\cos kx + b\sin kx,$$

которые представляют простые гармонические колебания. Такие задачи часто возникают в электротехнике: представить ток, изменяющийся по сложному закону $I = I(t)$, через простые синусоидальные токи $I_k\sin(\omega t + \varphi_0)$. Математическим аппаратом для исследования таких задач служат ряды, для которых базовыми являются функции

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx, \ldots .$$

Определение 1. ***Тригонометрическим рядом*** называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + + b_n \sin nx + \ldots . \quad (2.54)$$

Числа $\frac{a_0}{2}$, a_1, $b_1, \ldots$, a_n, $b_n, \ldots$ называются ***коэффициентами*** тригонометрического ряда (2.54).

Допустим, что функция $f(x)$ представляется на отрезке $[-\pi; \pi]$ тригонометрическим рядом

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2.55)$$

и предположим, что этот ряд является сходящимся для любого x отрезка $[-\pi; \pi]$, следовательно, его можно почленно интегрировать. Не будем приводить вывод коэффициентов a_n и b_n, а лишь отметим, что с помощью приемов интегрирования получаем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (2.56)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (2.57)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$

Определение 2. Числа a_n и b_n, вычисленные по формуле (2.56) и (2.57), называются ***коэффициентами Фурье*** для функции $f(x)$.

Определение 3. Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

коэффициенты которого совпадают с коэффициентами Фурье для функции $f(x)$, т.е. вычисляются по формулам (2.56) и (2.57), называются ***рядом Фурье*** функции $f(x)$.

Как и в случае ряда Тейлора, ряд Фурье не всегда сходится к порождающей функции. Для формирования условий сходимости ряда Фурье к порождающей функции введем дополнительные понятия.

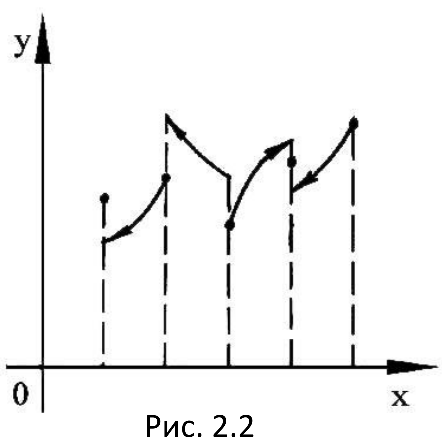

Рис. 2.2

Определение 4. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной*** на отрезке $[a;b]$, если она имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода (рис. 2.2), на котором жирными точками обозначено значение функции в точках разрыва).

Определение 5. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-дифференцируемой*** на отрезке $[a;b]$, если ее производная является кусочно-непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$(рис. 2.3).

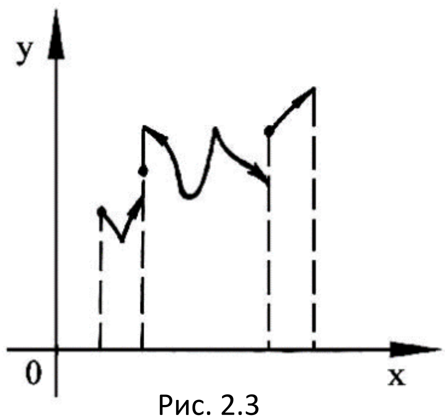

Рис. 2.3

Сформируем без доказательства следующие теоремы Дирихле, которые представляют достаточные условия поточечной сходимости к порождающей функции, за исключением, быть может, точек разрыва и границ отрезка.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится во всех точках $x\in[-\pi;\pi]$, причем в точках непрерывности функции $f(x)$ его сумма равна $f(x)$, в точках разрыва функции $f(x)$ его сумма равна $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, на концах отрезка его сумма равна $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется ***кусочно – монотонной*** на отрезке $[a;b]$, если его можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из интервалов функция монотонна (рис. 2.4).

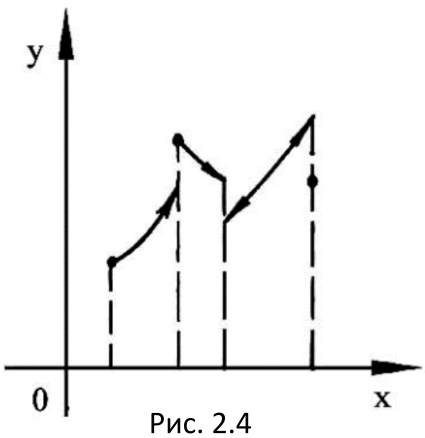

Рис. 2.4

Теорема 2. Если функция $f(x)$ ***кусочно-монотонна*** и ограничена на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье для этой функции сходится во всех точках $x\in[-\pi;\pi]$, причем в точках непрерывности его сумма равна $f(x)$, в точках разрыва функции $f(x)$ его сумма равна $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, а на концах отрезка его сумма равна $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Теорема 3. Если два равномерно сходящихся тригонометрических ряда тождественно равны

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx\right),$$

то эти ряды равны и формально:

$a_0=a_0'$;

$a_n=a_n'$, где $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$;

$b_n=b_n'$, где $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$.

Пример 1. Разложить функцию $f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\pi,\ -\pi\le x<0,\\ \pi-x,0\le x\le\pi\end{cases}$$

на интервале $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье (рис. 2.5).

Решение. Изобразим функцию графиком. Так как функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, в силу того, что ее производная

$$f'(x)=\begin{cases}0,\ -\pi\le x<0,\\ -1,\ 0\le x\le\pi\end{cases}$$

имеет лишь одну точку разрыва $x=0$ внутри отрезка $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к порождающей его функции во всех точках $x\in[-\pi;\pi]$. При этом значение полученного ряда в концах интервала равно

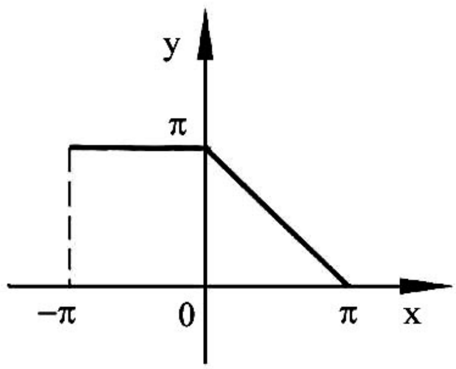

Рис. 2.5

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Вычислим коэффициенты Фурье. По формуле (2.56) имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{x^2}{2\pi}\Big|_{0}^{\pi}=\pi-(-\pi)-\left(\frac{\pi^2}{2\pi}-0\right)=$$

$$=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi\cos nx\,dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx.$$

При вычислении интеграла $\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$ воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (2.58)$$

Приняв $u = x$, $dv = \cos nx\,dx$, откуда $du = dx$, $v = \int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int \cos nx\,dnx = \frac{\sin nx}{n}$.

Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\sin \pi n}{n} - \frac{0\cdot\sin 0n}{n} - \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dnx\right) =$$

$$= \frac{\cos nx}{\pi\cdot n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\cos \pi n}{\pi n^2} - \frac{\cos 0}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dnx = -\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\left(\frac{\sin \pi n - \sin(-\pi n)}{n}\right) = -\left(\frac{\sin \pi n + \sin \pi n}{n}\right) = -\frac{2\sin \pi n}{n} = 0.$$

Окончательно имеем

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = 0 - \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{\pi n^2}.$$

По формуле (2.57) имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi\sin nx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx.$$

При вычислении интеграла $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$ воспользуемся формулой (2.58). Приняв $u = x$, $dv = \sin nx\,dx$, откуда $du = dx$, $v = \int \sin nx\,dx = \frac{1}{n}\int \sin nx\,dnx = -\frac{\cos nx}{n}$.

Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{x\cos nx}{\pi n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx =$$

$$= -\left(\frac{\pi\cos\pi n}{\pi n} - \frac{0\cdot\cos 0}{\pi n}\right) + \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dnx =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{\pi n^2}(\sin\pi n - \sin 0) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n^2}.$$

Окончательно имеем

$$b_n = \frac{\cos nx}{x}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{\cos\pi n - \cos(-\pi n)}{n} -$$

$$-\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n^2} = \frac{\cos\pi n - \cos\pi n}{n} + \frac{(-1)^{n+2}}{\pi n} = 0 + \frac{(-1)^{n+2}}{\pi n} = \frac{(-1)^{n+2}}{\pi n}.$$

Следовательно, функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = \frac{3}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n}\cos nx + \frac{(-1)^n}{\pi n}\sin nx\right).$$

3. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[-\ell;\ell]$

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\ell;\ell]$. Тогда подстановкой $x = \frac{\ell t}{\pi}$ переходим к функции $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi;\pi]$. Если $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\ell;\ell]$, тогда $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$ будет кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$. Разлагая в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функцию $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$, получим (всюду за исключением, быть может, точек разрыва функции и концов отрезка $[-\pi;\pi]$)

$$f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{n}\right)\cos nt\,dt,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{n}\right)\sin nt\,dt,\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Переходя к переменной x, имеем $t=\dfrac{\pi x}{\ell}$, $dt=\dfrac{\pi}{\ell}dx$ и при этом $t=-\pi$ соответствует $x=-\ell$, $t=\pi$ соответствует $x=\ell$.

Окончательно,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{\ell}x+b_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x\right), \qquad (2.59)$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}x\cdot\frac{\pi}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}x\,dx,$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots, \qquad (2.60)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\cdot\frac{\pi}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx,$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots\ . \qquad (2.61)$$

Таким образом, функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[-\ell;\ell]$, можно разложить в ряд Фурье (2.59), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2.60), (2.61). Равенство (2.77) может нарушиться лишь в точках разрыва функции и на концах отрезка $[-\ell;\ell]$.

Пример 2. Разложить функцию $f(x)=x$ на интервале $(-1;1)$ в ряд Фурье.

Решение. По формуле (2.59) (при $\ell=2$) имеем

$$f(x)=x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\pi nx+b_n\sin\pi nx).$$

Вычислим коэффициенты ряда a_n по формуле (2.60) и воспользовавшись формулой интегрирования по частям (2.58), где $U=x$, $dV=\cos\pi nx\,dx$, откуда $dU=dx$, $V=\dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx$, получим

$$a_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}x\cos\pi nx\,dx=x\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\sin\pi nx}{\pi n}dx=$$

$$=\frac{\sin\pi n+\sin(-\pi n)}{\pi n}-\frac{1}{\pi^2n^2}\int_{-1}^{1}\sin\pi nx\,d\pi nx=\frac{\sin\pi n-\sin\pi n}{\pi n}+$$

$$+\frac{\cos\pi nx}{\pi^2n^2}\Big|_{-1}^{1}=0+\frac{\cos\pi n-\cos(-\pi n)}{\pi^2n^2}=\frac{\cos\pi n-\cos\pi n}{\pi^2n^2}=0.$$

Вычислим коэффициенты ряда b_n по формуле (2.61) и воспользовавшись формулой интегрирования по частям (2.58), где $U=x$, $dV=\sin\pi nx\,dx$, откуда $dU=dx$, $V=-\dfrac{1}{\pi n}\cos\pi nx$, получим

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x\sin \pi nx\, dx = -x\frac{\cos \pi nx}{\pi n}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos \pi nx}{\pi n}dx =$$

$$= -\left(\frac{\cos \pi n + \cos(-\pi n)}{\pi n}\right) + \frac{1}{\pi^2 n^2}\sin \pi n x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{\cos \pi n - \cos \pi n}{\pi n} + \frac{\sin \pi n - \sin(-\pi n)}{\pi n} =$$

$$= -\frac{2\cos \pi n}{\pi n} + \frac{\sin \pi n + \sin \pi n}{\pi^2 n^2} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + 0 = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом,

$$f(x) = x = \frac{2}{\pi}\left(\sin \pi x - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin \pi n x}{n} + \ldots\right)$$

для $-1 < x < 1$.

4. Разложение в ряд Фурье периодических функций

Если данная функция $f(x)$ является периодической с периодом $T = 2\pi$, $f(x + 2\pi k) = f(x)$ и для нее имеет место разложение в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$, то оно справедливо и на всей прямой $(-\infty;\infty)$.

Действительно, сумма тригонометрического ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

если она существует, является периодической функцией с периодом 2π, так как $\cos nx$ и $\sin nx$ периодические функции.

Аналогично, если функция имеет период, то разложение (2.59) имеет место для всей прямой.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, определенную следующим образом на периоде (рис. 2.6):

$$f(x)=\begin{cases}0,\ -\pi\le x\le 0,\ 2<x\le\pi,\\ 1,\ 0<x<2,\\ 1/2,\ x=0,\ x=2.\end{cases}$$

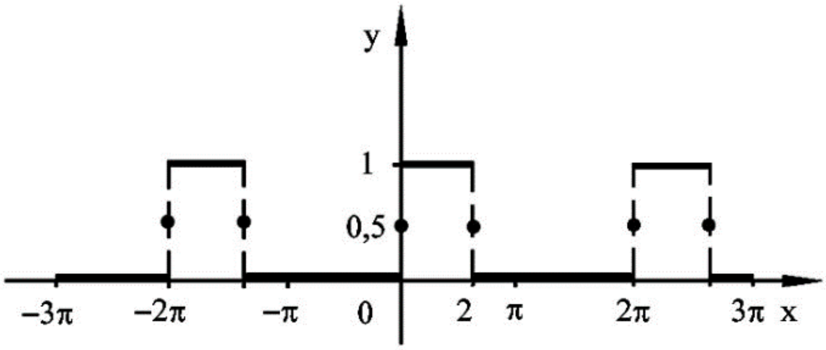

Рис. 2.6

Решение. Данная функция кусочно-дифференцируема (рис. 2.6), следовательно,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Изобразим график функции с ее периодическим продолжением.

Применив формулы (2.56) и (2.57), найдём коэффициенты Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2}dx=\frac{x}{\pi}\Big|_0^2=\frac{2}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{1}^{2}1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^2=$$

$$=\frac{\sin 2n}{\pi n}-\frac{\sin 0}{\pi n}=\frac{\sin 2n}{\pi n},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{1}^{2}1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_0^2=$$

$$=-\frac{\cos 2n}{\pi n}-\frac{\cos 0}{\pi n}=\frac{1-\cos 2n}{\pi n}.$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin 2n}{\pi n}\cos nx+\frac{1-\cos 2n}{\pi n}\sin nx\right).$$

Оно справедливо во всех точках непрерывности функции $f(x)$.

5. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Как было установлено, задачу разложения функции *f(x)* в ряд Фурье на произвольном сегменте [*a*, *b*] можно свести к задаче разложения несколько видоизмененной функции на сегменте [-*π*, π]. Поэтому мы далее будем ограничиваться только этим свойством.

Итак, пусть функция *f*(*x*) задана на сегменте [-*π*, π] и удовлетворяет условиям Дирихле. Займемся исследованием двух частных случаев.

Напомним, что функция *f(x)* называется *четной*, если

$$f(-x) = f(x)$$

во всей области ее задания; и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$)
(также для всех тех *x*, для которых значение функции определено).

Как легко проверить, произведение четной функции на четную, равно как и нечетной на нечетную, четно, а произведение четной и нечетной функции нечетно.

Очевидно, если функция *f(x)* нечетная, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,$$

а если функция *f(x)* четная, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Четность функций изменяется при их дифференцировании и интегрировании.

Теорема 4. Производная четной функции является нечетной функцией, а производная нечетной функции – четной.

Доказательство. Пусть функция *f(x)* – четная. Тогда при любых *x* и Δ*x* должно быть

$$f(x) = f(-x),\ f(x + \Delta x) = f(-x - \Delta x),$$

откуда

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(-x) - f(-x - \Delta x)}{\Delta x},$$

или переходя к пределу,

$$f'(x) = -f'(-x).$$

Случай нечетной функции *f(x)* рассматривается аналогично.

Следствие. *Вторая производная четной функции четна, а нечетной – нечетна.*

Теорема 5. Если функция *f(x)* нечетна, то ее первообразная *F* четна.

Если функция *f(x)*четная, а для ее первообразной *F* имеет место *F*(0) = 0, то функция *F* нечетная.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$нечетна.

Тогда

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(x)dx+C=-\int_0^{-x} f(-x)dx+C=-\int_0^{x}-f(x)dx+C=$$

$$=\int_0^{x} f(x)dx+C=F(x).$$

Если функция $f(x)$ – четна, то при $F(0) = 0$

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(x)dx=-\int_0^{-x} f(-x)dx=-\int_0^{x} f(x)dx=\int_0^{x} f(x)dx=-F(x).$$

Пусть $f(x)$ – нечетная на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция, т.е. $f(-x)=-f(x)$, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,dx, \tag{2.62}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots. \tag{2.63}$$

Если $f(x)$ – четная на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция, т.е. $f(-x)=f(x)$, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{2.64}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots. \tag{2.65}$$

Аналогичные формулы можно получить для функции $f(x)$ с периодом 2ℓ.

Если $f(x)$ – нечетная функция, ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{\ell}, \tag{2.66}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots. \tag{2.67}$$

Если $f(x)$ – четная функция, ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{\ell}, \tag{2.68}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots. \tag{2.69}$$

Задачи для решения в аудитории

Задача 1. Разложить $\ln x$ по степеням $(x-1)$.

Задача 2. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до $0{,}0001$.

Задача 3. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ с точностью до $0{,}0001$.

Задача 4. Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$. Указание. При решении этого примера полезно иметь в виду равенство: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Задача 5. Найти решение дифференциального уравнения $y''+xy'+y=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0, y'(0)=1$.

Ответы

1. $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}+\ldots$. 2. $0{,}9848$.

3. $0{,}1973$. 4. $\frac{\pi^2}{12}$. 5. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}+\ldots$.