Классическое определение вероятности

Событием (или случайным событием) называется всякий факт, который в результате опыта (эксперимента) может произойти или не произойти. Обозначаются события *A, B, C, …*.

Достоверным событием называется событие, которое в результате опыта непременно должно произойти, а *невозможным* – событие, которое в результате опыта не может произойти [7].

Пример 1. Если в урне находятся только цветные шары и из урны извлечён шар, то событие “извлечён цветной шар” является достоверным.

Пример 2. Если в ящике имеются только стандартные детали и из ящика наудачу извлечена деталь, то невозможным будет событие «извлечена нестандартная деталь».

Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого. В противном случае события называются *совместными*.

Пример 3. В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Наудачу берут одну деталь. Событие A – “появилась стандартная деталь” и событие B – “появилась нестандартная деталь” являются несовместными событиями.

Пример 4. Брошена игральная кость. Событие A – “появление двух очков” и событие B – “появление чётного числа очков” совместны, так как появление одного из них не исключает появление другого.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно несовместными*, если любые два из этих событий не совместны.

Пример 5. Произведено два выстрела по мишени, события A_1 - “два попадания”, A_2 - “только одно попадание”, A_3 - “ни одного попадания” попарно несовместные.

Полной группой событий называется множество событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Элементарными событиями будем называть события ω_i, которые:

1) составляют полную группу событий;

2) несовместны;

3) по известному элементарному событию можно судить, произошло или не произошло событие A, возможное в данном эксперименте.

Множество элементарных событий, поставленных в соответствие эксперименту, называется *пространством элементарных событий,* обозначается $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$.

Пример 6. При однократном бросании игральной кости элементарными событиями являются события: $\omega_1 = \{1\}$ – “появление одного очка”; $\omega_2 = \{2\}$; $\omega_3 = \{3\}$; $\omega_4 = \{4\}$; $\omega_5 = \{5\}$; $\omega_6 = \{6\}$. Событие $A = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}\}$ – появление “нечётного числа очков” является подмножеством пространства элементарных событий и является некоторым событием.

Элементарные события, принадлежащие событию *A,* называются *благоприятствующими* наступлению события *A*. В примере 6 это элементарные события ω_1, ω_3, ω_5.

События $A_1, A_2, \ldots$ называются *равновозможными*, если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

Пример 7. Появление того или иного числа очков при бросании игральной кости есть события равновозможные, т. к. игральная кость изготовлена из однородного материала и имеет строго симметричную форму.

Таким образом, каждое событие *A* определяется как подмножество пространства элементарных событий Ω. Очевидно, невозможному событию *A* не благоприятствует ни одно элементарное событие из Ω, т. е. оно совпадает с пустым множеством $\varnothing$; достоверному событию благоприятствуют все события пространства Ω.

Вероятностью случайного события *A* называется отношение числа элементарных равновозможных событий, благоприятствующих наступлению события *A*, к числу элементарных равновозможных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.1)$$

Рассмотрим некоторую область. Если вероятность попадания случайной точки в любую часть области пропорциональна мере этой области (длине, площади, объёму) и не зависит от её расположения и формы, то может быть использовано геометрическое определение вероятности: пусть геометрическая мера всей области S_D, а геометрическая мера части этой области, попадание в которую благоприятствует данному событию, есть S_d, то вероятность события равна: $P = S_d / S_D$.

Задача 1. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.

Решение. Пространство элементарных событий представляет собой множество:

ω_1– герб на первой монете, герб на второй монете;

ω_2 – герб на первой монете, цифра на второй монете;

ω_3 – цифра на первой монете, герб на второй монете;

ω_4 – цифра на первой монете, цифра на второй монете.

Событие *A* (выпадение хотя бы одного герба) = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Следовательно, $P(A) = 3/4 = 0{,}75$.

Задача 2. В урне 4 белых и 7 чёрных шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые (событие *A*)?

Решение. Найдём число элементарных событий: $n = C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 55$. Число случаев, благоприятствующих событию *A*, можно определить по формуле

$$m = C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6,$$

т. к. белых шаров 4, а выбираем из них 2. Тогда $P = \dfrac{m}{n} = 6/55 = 0{,}109$.

Операции над событиями

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в появлении хотя бы одного события: *A* или *B*. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в совместном появлении события *A* и события *B*. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий [7].

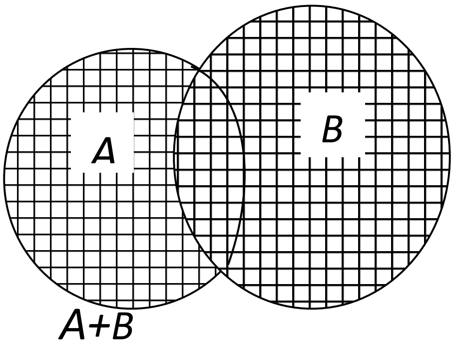

Рис. 2.1. Сумма событий

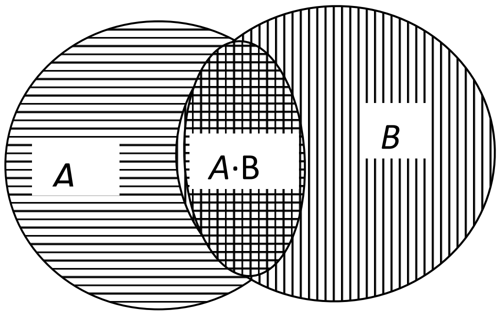

Рис. 2.2. Произведение событий

Пример 1. Каждый из стрелков делает по одному выстрелу в мишень.

а) Какое событие противоположно событию *A* – “хотя бы один стрелок попал в цель”?

б) Какое событие противоположно событию *C* – “каждый из стрелков попал в цель”?

Решение.

а) $\overline{A}$ – “каждый из стрелков промахнулся”. Справедливость ответа вытекает из того, что событие *A* - означает поражение мишени, а событие $\overline{A}$ – не поражение мишени.

б) $\overline{C}$ – “хотя бы один из стрелков промахнулся”.

На основании этого примера приведём формулы, справедливые в алгебре событий: $\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}$;

$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_n}$, если A_i обозначает “i - й стрелок попал в цель”, а $\overline{A_i}$ – “i - й стрелок промахнулся”.

Несовместными событиями называются два события *A* и *B*, если не существует элементарного события, благоприятствующего одновременно обоим событиям.

Например, при бросании игральной кости событие A – “выпадает количество очков, равное 1 или 2” и событие B – “выпадает количество очков, равное 4 или 5” не совместны.

Условной вероятностью события A относительно события B называется вероятность события A, вычисленная в предположении, что имело место событие B. Эта вероятность обозначается $P=(A/B)$, или $P_A(B)$.

Например, в урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из урны последовательно вынимают два шара. Найти вероятность того, что второй шар окажется чёрным при условии, что первый был чёрным.

Обозначим события: B – “первый шар чёрный”; A – “второй – чёрный”. Если произошло событие B, то в урне осталось 6 шаров, из которых два чёрных. Поэтому искомая условная вероятность $P(A/B)=2/6=\frac{1}{3}$.

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого относительно первого:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B) \tag{2.2}$$

Для нескольких событий

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}). \tag{2.3}$$

События A или B называются *независимыми,* если

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

В этом случае:

$$P(A)=P(A/B),\ \ P(B)=P(B/A). \tag{2.4}$$

Верно и обратное утверждение.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если

$$P(\mathop{\Pi}_{l=1}^{n} A_i)=\mathop{\Pi}_{l=1}^{n} P(A_i) \tag{2.5}$$

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{2.6}$$

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(\sum_{l=1}^{n} A_i)=\sum_{l=1}^{n} P(A_i). \tag{2.7}$$

Если события A и B совместны, вероятность их суммы вычисляется по формуле

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \tag{2.8}$$

Для нескольких совместных событий вероятность их суммы определяется по формуле:

$$P(\sum_{l=1}^{n} A_i)=\sum_{i} P(A_i)-\sum_{i\prec j} P(A_iA_j)+\sum_{i\prec j\prec k} P(A_iA_jA_k)-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n), \tag{2.9}$$

где суммы распространяются на все возможные комбинации различных индексов $i, j, k, \ldots$, взятых по одному, по два, по три и т. д.

Задача 1. В ящике находится 7 деталей первого сорта, 5 – второго сорта и 3 – третьего сорта. Из ящика последовательно вынимают три детали. Найти вероятность того, что первая, наугад вынутая, деталь окажется первого сорта (событие A_1), вторая деталь – второго сорта (событие A_2) и третья деталь – третьего сорта (событие A_3).

Решение. Очевидно, что: $P(A_1) = \frac{7}{15}$; $P(A_2 / A_1) = \frac{5}{14}$; т $P(A_3 / A_1 \cdot A_2) = \frac{3}{13}$, т. к. событие A_2 / A_1 означает, что второй раз вынули деталь второго сорта при условии, что первый раз была вынута деталь первого сорта. Значит, при повторном вытягивании в ящике осталось 14 деталей, из них второго сорта – 5. Аналогично находим $P(A_3 / A_1 \cdot A_2)$ по формуле (2.3).

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) = \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{1}{26}.$$

Задача 2. В ящике имеется 90 стандартных деталей и 10 нестандартных. Из ящика наугад берут одну за другой две детали. “Появление стандартной детали при первом испытании” – событие A, “появление стандартной детали при втором испытании” – событие B. Проверить, зависимы или не зависимы события A и B.

Решение. $P(A) = \frac{90}{100} = 0{,}9$. Вероятность события B зависит от результата первого испытания: если в первом испытании событие A произошло, то

$$P(B / A) = \frac{90 - 1}{100 - 1} = \frac{89}{99};$$

если же событие A не произошло, то

$$P(B / \overline{A}) = \frac{90}{100 - 1} = \frac{10}{11}.$$

События A и B зависимы, т. к.

$$P(A) = 0{,}9 \neq \frac{89}{99} = P(B / A).$$

Задача 3. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение. Обозначим события: A – “выпадает 6 очков при бросании первой игральной кости”, B – “выпадает 6 очков при бросании второй игральной кости”. Так как события A и B совместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, т. к. события независимы. Так как $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{1}{6}$, поэтому $P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.