Важнейшие примеры распределений

1. Биномиальное распределение

Рассмотрим серию из *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события *A* равна *p*. Случайная величина *X* означает число наступления событий. Она дискретна и ее возможными значениями являются неотрицательные целые числа 0, 1, 2, ... , *n*.

Закон распределения случайной величины *X* задается уже известной нам формулой.

$$P_n(\kappa) = C_n^{\kappa} p^{\kappa} q^{n-\kappa},$$

определяющей вероятность равенства $X = \kappa$.

Математическое ожидание *X* равно

$$M(X) = np.$$

Дисперсия *X* равна

$$D(X) = npq.$$

Задача 1. Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий и вычислить математическое ожидание и дисперсию указанной случайной величины.

Решение. Случайная величина *X* – число попаданий в мишень при трех выстрелах – распределена по биноминальному закону, её возможные значения 0, 1, 2, 3.

$$P(x=0) = C_3^0 p^0 q^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343;$$

$$P(x=1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}441;$$

$$P(x=2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}189;$$

$$P(x=3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0{,}3^3 = 0{,}027.$$

Ряд распределения случайной величины *X* приведем в табл. 2.

Таблица 2

X	0	1	2	3
p	0,343	0,441	0,189	0,027

2. Нормальный закон распределения

Среди законов распределения, которым подчиняются встречающиеся на практике случайные величины, чаще всего приходится иметь дело с нормальным законом распределения. В частности, нормальный закон распределения имеет фундаментальное значение при обработке результатов испытаний или эксперимента.

Функция нормального распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^x e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

где a и σ^2 – параметры распределения, представляющие собой соответственно математическое ожидание и дисперсию случайной величины x.

Нормальная плотность вероятности

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2.17)$$

Если в выражении функции распределения и плотности вероятности перейти к новой переменной, называемой *нормированной, случайной величиной*

$$z=\frac{x-a}{\sigma}, \qquad (2.18)$$

то получим

$$F(z)=F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}}\ell^{\frac{-z^2}{2}}\,dz \qquad (2.19)$$

и

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}. \qquad (2.20)$$

Выражение (2.19) представляет собой функцию нормального закона распределения нормированной случайной величины (2.18) называется *нормированной функцией нормального распределения*. Функция (2.20) является плотностью вероятности нормированного нормального распределения. Значения этой функции для различных z приведены в прил.1. С нормальной плотностью вероятности (2.17) функция (2.20) имеет следующую связь:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi(z). \qquad (2.21)$$

Выражения (2.19) и (2.20) показывают, что если случайная величина x распределена нормально со средним, равным a, и дисперсией, равной σ^2, то нормированная случайная величина z (2.18) также имеет нормальное распределение со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

Вероятность нахождения в интервале $(-\infty,\ x_1)$ случайной величины X, следующей нормальному закону распределения, на основании (2.16) и (2.17), определится как

$$P(X \prec x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_1}\ell^{\frac{-z^2}{2}}\,dz \qquad (2.22)$$

или, что легко доказать,

$$P(X \prec x_1)=0{,}5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z_1}\ell^{\frac{-z^2}{2}}\,dz. \qquad (2.23)$$

Интеграл с переменным верхним пределом вида

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z}\ell^{\frac{-z^2}{2}}\,dz \qquad (2.24)$$

носит название функции Лапласа. Геометрически функция Лапласа представляет собой площадь под кривой $\varphi(z)$ в промежутке от 0 до z (рис. 2.6). Значения этой функции приведены в прил. 2.

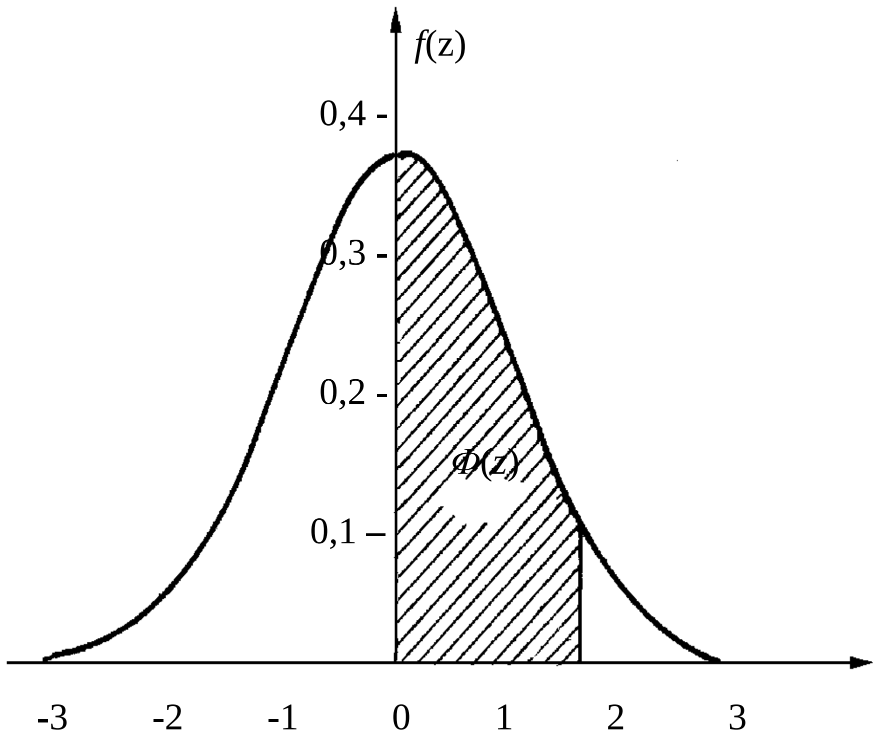

Рис. 2.6. Геометрическое представление функции Лапласа

Следует иметь в виду, что

$$\Phi(-z) = -\Phi(z);\ \Phi(-\infty) = -1/2;\ \Phi(0)=0;\ \Phi(\infty) = 1/2. \qquad (2.25)$$

С учетом (2.24) вероятность нахождения в интервале $(-\infty; x_1)$ случайной величины X определится из выражения

$$P(X<x_1)=0{,}5+\Phi(z_1). \qquad (2.26)$$

Для интервала $(x_1; x_2)$ соответствующую вероятность можно подсчитать на основании (2.16) и (2.24) как

$$P(x_1<X\le x_2)=\Phi(z_2) - \Phi(z_1), \qquad (2.27)$$

где

$$z_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma} \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}. \qquad (2.28)$$

Пользуясь указанными соотношениями и прил. 2 легко, можно определить, что вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $a \pm \sigma$ составляет – $P \approx 0{,}68$; в интервал $a \pm 2\sigma$ – $\approx 0{,}95$ и в интервал $a+3\sigma$ – $P \approx 0{,}997$.

Нетрудно показать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по нормальному закону равны a и σ^2 соответственно, т. е.

$$M(X) = a;\ D(X) = \sigma^2.$$

Задача 2. Образцы из прессованного дюралюминиевого профиля испытывают на разрыв с целью определения предела прочности $\sigma_в$. Определить вероятность попадания значения предела прочности испытываемого образца в интервал (43 кгс/мм^2; 47 гс/мм^2), если для случайной величины $X=\sigma_в$; a=45,3кгс/мм^2 и σ =1,13 кгс/мм^2.

Решение. Пользуясь формулами (2.28), находим

$$z_1 = \frac{43-45{,}3}{1{,}13} = -2{,}03 \ \text{ и } \ z_2 = \frac{47-45{,}3}{1{,}13} = 1{,}50.$$

По прил. 2 для вычисленных значений z_1и z_2 определяем

$$\Phi(z_1)=\Phi(-2{,}03) = -\Phi\ (2{,}03) = -0{,}4788$$

и

$$\Phi(z_2) = \Phi(1{,}50) = 0{,}4332.$$

На основании формулы (2.27) находим

P(43 кгс/мм^2<$\sigma_в\leq$ 47 кгс/мм^2) =$\Phi(1{,}50) - \Phi(-2{,}03)$=0,4332+0,4788= =0,912.

Приведенные расчеты показывают, что если испытаниям на разрыв подвергнуть большое число образцов, то около 90% из них будут иметь значения предела прочности, лежащие в указанных интервалах.

Задача 3. Длина изготавливаемой автоматом детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с параметрами $M(X)=1{,}5$ см; σ = 0,2 см. Найти вероятность брака, если допускаемые размеры детали должны быть $15 \pm 0{,}3$ см. Какую точность длины можно гарантировать с вероятностью 0,97?

Решение.

а) $P(|x-M(X)|<0{,}3) = 2\Phi(\frac{0{,}3}{\sigma})$

т.к. параметр $a = M(X); \varepsilon = 0{,}3$ для нормального закона распределения.

$$P(|x-15|<0{,}3) = 2\Phi(\frac{0{,}3}{0{,}2}) = 2\cdot 0{,}4332 = 0{,}8664$$ (см. прил. 1).

Вероятность брака

$$P = 1-0{,}8664 = 0{,}1336.$$

б) $P(|x-M(X)|<\varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 0.97;$ $\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 0{,}485$, $\frac{\varepsilon}{\sigma} = 2{,}17$ (см. прил. 2),т.к. $\varepsilon = 2{,}17\cdot\sigma = 2{,}17\cdot 0{,}2 = 0{,}434(\text{см})$.

Следовательно, с вероятностью 0,97 можно гарантировать размеры $15 \pm 0{,}434(\text{см})$.

3. Распределение Пуассона

Как и закон Гаусса, распределение Пуассона может быть получено как асимптотическое для биноминального.

Рассмотрим случай, когда вероятность p положительного исхода каждого испытания в серии из n испытаний равна λ/n, где λ – некоторая постоянная величина, и укажем в этом случае новую приближенную формулу для $P_n(\kappa)$.

Пусть в серии из n испытаний вероятность появления события A в каждом испытании равна λ/n. Тогда вероятность появления события A в этой серии κ раз при большом n выражается приближенной формулой (см. §5)

$$P_n(\kappa) = \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} \ell^{-\lambda}. \qquad (2.29)$$

Пусть теперь X – дискретная случайная величина, которая может принимать целые неотрицательные значения. Если вероятность равенства $X=\kappa$ определяется формулой (2.45), то мы говорим, что величина *X распределена по закону Пуассона.*

Запишем закон распределения в виде табл. 3.

Таблица 3

x_i	0	1	2	…	κ	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1} \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} \cdot e^{-\lambda}$	…

Легко проверить, что

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} p_\kappa = \ell^{-\lambda} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Для математического ожидания имеем

$$M(X)=0 \cdot e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda}{1} \cdot e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + \ldots + \kappa \cdot \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} \cdot e^{-\lambda} + \ldots =$$

$$= \lambda\, e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1} \cdot + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} + \ldots\right).$$

Но, как известно, ряд в скобках представляет разложение функции e^λ в ряд Маклорена. Поэтому математическое ожидание равно $e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^\lambda$ или

$$M(X) = \lambda. \qquad (2.30)$$

Мы выяснили, таким образом, вероятностный смысл параметра λ, входящего в закон распределения Пуассона: *параметр λ равен математическому ожиданию случайной величины*.

Нетрудно показать, что дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна математическому ожиданию.

$$D(X) = \lambda, \qquad (2.31)$$

т. е. в *этом случае дисперсия равна математическому ожиданию*.

К случайным величинам, подчиненным закону Пуассона, приводит большое число задач, относящихся к вопросам массового обслуживания.

В качестве примера укажем работу телефонной станции. Можно доказать, что при выполнении некоторых условий вероятность κ вызовов за промежуток времени длины t определяется формулой

$$P_\kappa(t) = \frac{(at)^\kappa}{\kappa!} \cdot e^{-at}. \qquad (2.32)$$

Если положить $at=\lambda$, то из формулы (2.32) следует, что случайная величина *X распределена по закону Пуассона.*

Задача 4. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятности того, что за 5 минут поступит 2 вызова.

Решение. По условию, a = 24 t = 5; κ = 2. Воспользуемся формулой (2.32):

$$P_2(5) = \frac{(2\cdot 5)^2}{2!}\cdot e^{-2\cdot 5} = 0{,}000225.$$

Это событие практически невозможное.

4. *Равномерное распределение вероятностей*

Пусть плотность вероятности равна нулю всюду, кроме интервала (a, b), на котором она постоянна. Если обозначить эту постоянную через A, то в силу свойств плотности распределения получим

$$\int_a^b A\,dx = 1,$$

откуда $A = 1/(b-a)$. Поэтому плотность распределения (дифференциальный закон) равномерного распределения задается формулой

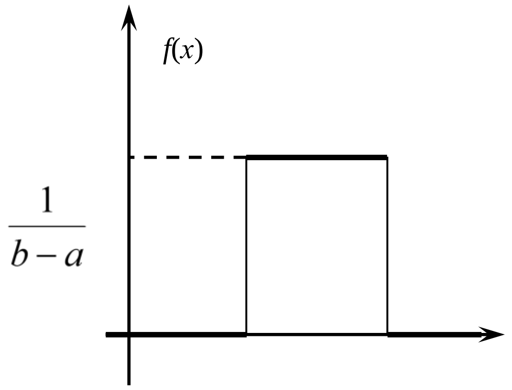

Рис. 2.7. График функции

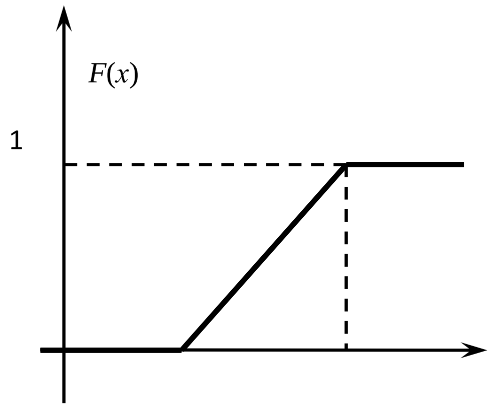

Рис. 2.8. График функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\infty < x < a; \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ при } a < x < b; \\ 0 \text{ при } b < x < +\infty. \end{cases} \qquad (2.33)$$

(рис. 2.7). В точках $x=a$ и $x=b$ функция $f(x)$ разрывна. Для нахождения функции распределения (интегрального закона распределения), воспользовавшись формулой $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$ получим

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\infty < x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a < x < b, \\ 1 \text{ при } b < x < +\infty. \end{cases}$$

(2.34)

(рис. 2.8). Эта функция непрерывна всюду.

Пользуясь формулой $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$ для математического ожидания получим

$$M(x)=\int\limits_{a}^{b}\frac{x}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}, \qquad (2.35)$$

так что математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на интервале (*a*, *b*), находится в центре этого интервала. Для вычисления дисперсии найдем $M(X^2)$, пользуясь формулой $M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$:

$$M(X^2)=\int\limits_{a}^{b}\frac{x^2}{b-a}\,dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}. \qquad (2.36)$$

Поэтому дисперсия равномерно распределенной случайной величины по формуле $D(X)=M\left(X^2\right)-M(X)^2$ равна

$$D(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (2.37)$$

Таким образом, для случайной величины, равномерно распределенной на интервале (*a*, *b*), среднее квадратическое отклонение равно 0,288675… длины интервала.

Пользуясь формулой (2.16), для определения вероятности попадания непрерывной случайной величины X на участок от α до β получим

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha). \qquad (2.38)$$

Задача 5. Точка бросается наугад (без прицеливания) на отрезок [0,I]. Случайная величина *X*–абсцисса точки попадания (считается, что бросаемая точка обязательно попадает на отрезок [0, 1]). Найти функцию плотности распределения и функцию распределения. Вычислить математическое ожидание и дисперсию указанной случайной величины. Найти вероятность того, что точка попадет в интервал [0; 0,5].

Решение. В этом случае мы имеем дело с непрерывной случайной величиной, все значения которой принадлежат отрезку [0, 1]. Поэтому в выражении для плотности распределения и функции распределения a = 0, а b = 1, т. е.

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -\infty<x<0;\\ 1 \text{ при } 0<x<1;\\ 0 \text{ при } 1<x<+\infty.\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -\infty<x<0;\\ x \text{ при } 0<x<1;\\ 1 \text{ при } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Согласно формулам (2.35), (2.37) и (2.38) $M(X)$=1/2, $D(X)$ = 1/12,

$$P(0\le x\le 0{,}5)=F(0{,}5)-F(0)=0{,}5-0=0{,}5.$$