Основные определения. Задача Коши.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Решение различных задач методом систематического моделирования сводится к отысканию неизвестной функции из уравнения, содержащего независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции. Такое уравнение называется дифференциальным [1].

Определение. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая обращает данное уравнение в тождество. Рассмотрим задачу, приводящую к дифференциальному уравнению.

Пример 1. Найти функцию, график которой обладает тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенной между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $y = f(x)$ – искомая функция, а $M(x, y)$– произвольная точка кривой, определяемой этим уравнением; предположим для определенности, что кривая расположена в первой четверти (рис. 1.1).

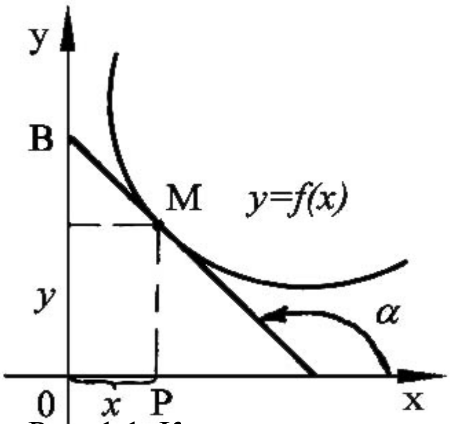

Рис. 1.1. Криавя, рассмотренная в примере 1

По условию задачи имеем $BM = MA$, а следовательно, $OP = PA = x$. Из рис. 2.1 видно, что $\operatorname{tg}(\angle PAM) = \frac{MP}{PA}$, т.е. $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$, или $-\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.

Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент касательной, который в точке $M(x, y)$ равен y', получаем дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{1.1}$$

Решением уравнения (1.1) является всякая функция вида

$$y = \frac{C}{x}, \tag{1.2}$$

Где c– постоянная. В самом деле, заменив в уравнении (1.1) y его значением из равенства (1.2), получим

$$\left(\frac{C}{x}\right)' = -\frac{\frac{C}{x}}{x}, \text{ т.е. } -\frac{C}{x^2} = -\frac{C}{x^2}.$$

Следовательно, равенство (1.2) определяет множество функций, обладающих указанным в задаче свойством. Графики этих функций представляют собой семейство гипербол (рис.1.1).

В дальнейшем рассмотрим еще ряд примеров, которые показывают, каким мощным математическим аппаратом являются дифференциальные уравнения при решении различных и весьма непростых практических задач.

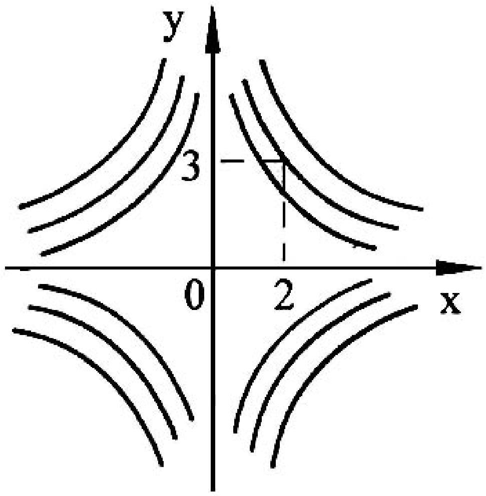

Рис. 1.2. Семейство интегральных кривых

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные y', $y'', \cdots$, $y^{(n)}$. Символически дифференциальное уравнение записывается так :

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.3}$$

Определение. *Порядком дифференциального уравнения* называется наибольший порядок производных, входящих в данное уравнение.

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.4}$$

Разрешая уравнение (1.4) относительно производной y', если это возможно, получим

$$y' = f(x, y). \tag{1.5}$$

Рассмотренный выше пример показывает, что дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений.

При различных значениях постоянной C равенство

$$y = \frac{C}{x}, \tag{1.6}$$

определяет различные решения уравнения

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{1.7}$$

Например, непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции $y=1/x \quad (C=1)$, $y=3/x \quad (C=3)$ являются решениями уравнения (1.1).

Таким образом, каждому дифференциальному уравнению соответствует, как правило, бесконечная совокупность его решений.

Определение. Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его *частным решением*. С геометрической точки зрения совокупность всех решений дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых, называемых *интегральными кривыми*, а каждое частное решение представляет отдельную интегральную кривую.

Определение. Функция $y=\varphi(x,C)$ представляет *общее решение* дифференциального уравнения (1.4) или (1.5), если при любом значении C эта функция является решением уравнения (1.4) или (1.5) и любое его частное решение может быть получено из $y=\varphi(x,C)$ при некотором значении постоянной C.

Иногда не удается получить решение дифференциального уравнения в явной форме $y=\varphi(x)$ или $y=\varphi(x,C)$, а получают их в неявной форме, т.е. решение задается формулой вида

$$\Phi(x,y)=0, \text{ или } \Phi(x,y,C)=0. \tag{1.8}$$

Определение. Выражение $\Phi(x,y)=0$, или $\Phi(x,y,C)=0$ в этом случае называют *интегралом (частным, общим)* дифференциального уравнения.

При решении конкретных задач часто необходимо выделить из всей совокупности решений дифференциального уравнения то частное решение, которое является ответом на поставленный вопрос. Для того, чтобы из всей совокупности решений выделить отдельную интегральную кривую, задают так называемое *начальное условие*.

В случае дифференциальных уравнений первого порядка (1.5) под *начальными условиями* для его решения $y=y(x)$ понимают условия, состоящие в том, что $y=y_0$ при $x=x_0$, т.е.

$$y(x_0)=y_0, \tag{1.9}$$

где x_0 и y_0– заданные числа (начальные данные) такие, что при $x=x_0$ и $y=y_0$ функция имеет смысл, т.е. существует $f(x_0,y_0)$.

Определение. Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши.*

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее при заданных начальных данных (x_0, y_0) начальному условию $y(x_0) = y_0$, или, в другой записи, $y_{x=x_0} = y_0$, где x_0, y_0 – заданные числа.

Пусть даны начальные данные $x_0 = 2, y_0 = 3$, и требуется найти частное решение $y = y(x)$ уравнения (1.7), удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 3$. Выше показано, что функция (1.6) при любом C является решением уравнения (1.7).

Подставим в формулу (1.6) начальные данные $x = 2$, $y = 3$, найдем $3 = C/2$, т.е. $C = 6$. Таким образом, искомым частным решением уравнения (1.7) является функция $y = 6/2$.

Геометрически решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку (x_0, y_0).

Так, общее решение $y = C/x$ уравнения $y' = -y/x$ определяет семейство равносторонних гипербол (см. рис.1.2). Частное решение $y = 6/x$ определяет гиперболу, проходящую через точку (2;3).

Рассмотрим различные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

1. *Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными*

Определение. Дифференциальное уравнение называется *уравнением с разделяющимися* переменными, если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y). \tag{1.10}$$

Для уравнения (1.10) теорема Коши о существовании и единственности решения может быть сформирована следующим образом.

Теорема. Если функция $f_1(x)$ непрерывна в интервале $(a;b)$, функция $f_2(y)$ и ее производная по y непрерывна в интервале $(c;d)$, то для любых начальных данных $x_0 \in (a;b)$, $y_0 \in (c;d)$ существует, причем единственное, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.10), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Другими словами, при указанных условиях через любую точку прямоугольника $a < x < b$, $c < y < d$ проходит, и при том единственная, интегральная кривая уравнения (1.1).

Если $f_2(y) \neq 0$, то уравнение с разделяющимися переменными (2.10) можно переписать в виде *(разделить переменные)*

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{1.11}$$

Определение. Уравнение вида (1.11) называется уравнением с разделяющимися переменными.

Теорема. Если существуют интегралы $\int \frac{dy}{f(y)}$ и $\int f_1(x)dx$, то общий интеграл уравнения с разделенными переменными (1.11) задается уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C,$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ – некоторые первообразные соответственно функций – $\frac{1}{f_2(y)}$ и $\frac{1}{f_1(x)}$.

Доказательство. Допустим, что функция $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (1.11). Подставляя в (1.11), получим тождество относительно переменной x:

$$\frac{\varphi'(x)dx}{f_2(\varphi(x))} = f_1(x)dx.$$

Интегрируя это тождество по x, найдем:

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{f_2(\varphi(x))} = \int f_1(x)dx + C$$

или, учитывая, что $y = \varphi(x)$ и $dy = \varphi'(x)dx$, по правилу подстановки в неопределенном интеграле имеем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \tag{1.12}$$

или

$$F_2(y) = F_1(x) + C, \tag{1.13}$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$– некоторые первообразные соответственно функций $\dfrac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

Итак, любое решение дифференциального уравнения (1.11) удовлетворяет уравнению (1.13). Обратно, если некоторая функция $y=\varphi(x)$ удовлетворяет равенству (1.13), то она удовлетворяет и равенству (1.12), но тогда имеет место все предыдущие равенства, включая и (1.11). Таким образом, равенство (1.13) определяет общий интеграл уравнения (1.11).

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (1.10) можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) разделить переменные;

2) интегрируя почленно полученное уравнение с разделяющимися переменными (1.11), найти его общий интеграл (1.13);

3) выяснить, имеет ли уравнение (1.10) решения, не получающиеся из общего интеграла (1.13);

4) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (если это требуется).

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$2yy'=1-3x^2$,если $y_0=3$ при $x_0=1$.

Решение. Заменяем y' на $\dfrac{dy}{dx}$, получим $2y\dfrac{dy}{dx}=1-3x^2$, отсюда $2y\,dy=\left(1-3x^2\right)dx$.

Интегрируя обе части последнего неравенства, найдем $\int 2y\,dy=\int\left(1-3x^2\right)dx$, или $2\int y\,dy=\int dx-3\int x^2\,dx$,

или $2\cdot\dfrac{y^2}{2}=x-\dfrac{3x^2}{3}+C$, т.е. $y^2=x-x^2+C$.

Подставив начальное значение $x_0=1$, $y_0=3$, найдем C: $9=1-1+C$, т.е. C = 9.

Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2=x-x^3+9$, или $x^3+y^2-x-9=0$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$\left(x^2y^2-x^2y\right)dy-xy^2\,dx=0,\ x\neq 0,\ y\neq 0.$$

Решение. Разделим переменные. Для этого преобразуем данное уравнение, вынося общий множитель слева x^2: $x^2\left(y^2-y\right)dy=xy^2\,dx$.

Разделим правую и левую части уравнения на x^2y^2:

$$\frac{x^2}{x^2y^2}\left(y^2-y\right)dy=\frac{xy^2}{x^2y^2}dx,\text{ или }\frac{y(y-1)}{y^2}dy=\frac{dx}{x},$$

или $\frac{y-1}{y}dy=\frac{dx}{x}$. Проинтегрируем обе части последнего равенства: $\int\frac{y-1}{y}dy=\int\frac{dx}{x},\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=\int\frac{dx}{x}$, или $\int dy-\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$, откуда $y-\ln|y|=\ln|x|+C_1$ - общий интеграл данного уравнения.