§1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Решение различных задач методом систематического моделирования сводится к отысканию неизвестной функции из уравнения, содержащего независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции. Такое уравнение называется дифференциальным [1].

Определение. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая обращает данное уравнение в тождество. Рассмотрим задачу, приводящую к дифференциальному уравнению.

Пример 1. Найти функцию, график которой обладает тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенной между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $y = f(x)$ – искомая функция, а $M(x, y)$– произвольная точка кривой, определяемой этим уравнением; предположим для определенности, что кривая расположена в первой четверти (рис. 1.1). По условию задачи имеем $BM = MA$, а следовательно, $OP = PA = x$. Из рис. 2.1 видно, что $\operatorname{tg}(\angle PAM) = \dfrac{MP}{PA}$, т.е. $\operatorname{tg}\left(180^\circ - \alpha\right) = \dfrac{y}{x}$, или $-\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$.

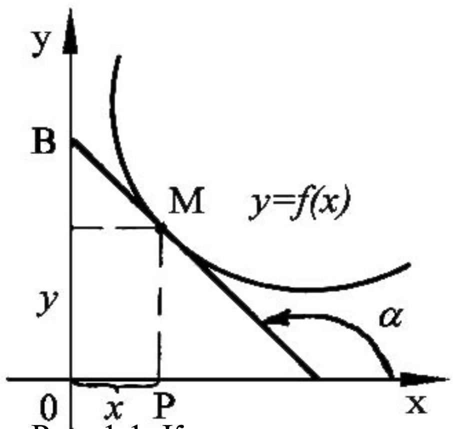

Рис. 1.1. Криавя, рассмотренная в примере 1

Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент касательной, который в точке $M(x, y)$ равен y', получаем дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{1.1}$$

Решением уравнения (1.1) является всякая функция вида

$$y = \frac{C}{x}, \tag{1.2}$$

Где *c*– постоянная. В самом деле, заменив в уравнении (1.1) y его значением из равенства (1.2), получим

$$\left(\frac{C}{x}\right)' = -\frac{\frac{C}{x}}{x}, \text{ т.е. } -\frac{C}{x^2} = -\frac{C}{x^2}.$$

Следовательно, равенство (1.2) определяет множество функций, обладающих указанным в задаче свойством. Графики этих функций представляют собой семейство гипербол (рис.1.1).

В дальнейшем рассмотрим еще ряд примеров, которые показывают, каким мощным математическим аппаратом являются дифференциальные уравнения при решении различных и весьма непростых практических задач.

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные y', y'', $\cdots$, $y^{(n)}$. Символически дифференциальное уравнение записывается так :

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1.3)$$

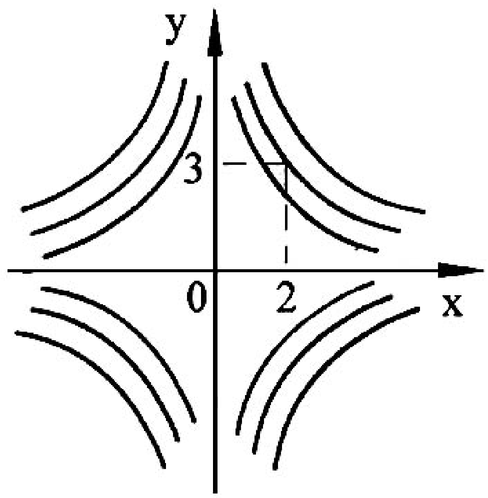

Рис. 1.2. Семейство интегральных кривых

Определение. *Порядком дифференциального уравнения* называется наибольший порядок производных, входящих в данное уравнение.

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1.4)$$

Разрешая уравнение (1.4) относительно производной y', если это возможно, получим

$$y' = f(x, y). \qquad (1.5)$$

Рассмотренный выше пример показывает, что дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений.

При различных значениях постоянной C равенство

$$y = \frac{C}{x}, \qquad (1.6)$$

определяет различные решения уравнения

$$y' = -\frac{y}{x}. \qquad (1.7)$$

Например, непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции $y = 1/x \quad (C = 1)$, $y = 3/x \quad (C = 3)$ являются решениями уравнения (1.1).

Таким образом, каждому дифференциальному уравнению соответствует, как правило, бесконечная совокупность его решений.

Определение. Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его *частным решением*. С геометрической точки зрения совокупность всех решений дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых, называемых *интегральными кривыми*, а каждое частное решение представляет отдельную интегральную кривую.

Определение. Функция $y=\varphi(x,C)$ представляет *общее решение* дифференциального уравнения (1.4) или (1.5), если при любом значении C эта функция является решением уравнения (1.4) или (1.5) и любое его частное решение может быть получено из $y=\varphi(x,C)$ при некотором значении постоянной C.

Иногда не удается получить решение дифференциального уравнения в явной форме $y=\varphi(x)$ или $y=\varphi(x,C)$, а получают их в неявной форме, т.е. решение задается формулой вида

$$\Phi(x,y)=0, \text{ или } \Phi(x,y,C)=0. \qquad (1.8)$$

Определение. Выражение $\Phi(x,y)=0$, или $\Phi(x,y,C)=0$ в этом случае называют *интегралом (частным, общим)* дифференциального уравнения.

При решении конкретных задач часто необходимо выделить из всей совокупности решений дифференциального уравнения то частное решение, которое является ответом на поставленный вопрос. Для того, чтобы из всей совокупности решений выделить отдельную интегральную кривую, задают так называемое *начальное условие*.

В случае дифференциальных уравнений первого порядка (1.5) под *начальными условиями* для его решения $y=y(x)$ понимают условия, состоящие в том, что $y=y_0$ при $x=x_0$, т.е.

$$y(x_0)=y_0, \qquad (1.9)$$

где x_0 и y_0– заданные числа (начальные данные) такие, что при $x=x_0$ и $y=y_0$ функция имеет смысл, т.е. существует $f(x_0,y_0)$.

Определение. Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши.*

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение $y=y(x)$ уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее при заданных начальных данных (x_0,y_0) начальному условию $y(x_0)=y_0$, или, в другой записи, $y_{x=x_0}=y_0$, где x_0,y_0 – заданные числа.

Пусть даны начальные данные $x_0=2, y_0=3$, и требуется найти частное решение $y=y(x)$ уравнения (1.7), удовлетворяющее начальному условию $y(2)=3$. Выше показано, что функция (1.6) при любом C является решением уравнения (1.7).

Подставим в формулу (1.6) начальные данные $x=2$, $y=3$, найдем $3=C/2$, т.е. $C=6$. Таким образом, искомым частным решением уравнения (1.7) является функция $y=6/2$.

Геометрически решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку (x_0,y_0).

Так, общее решение $y = C/x$ уравнения $y' = -y/x$ определяет семейство равносторонних гипербол (см. рис.1.2). Частное решение $y = 6/x$ определяет гиперболу, проходящую через точку (2;3).

Рассмотрим различные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

1. *Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными*

Определение. Дифференциальное уравнение называется *уравнением с разделяющимися* переменными, если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y). \tag{1.10}$$

Для уравнения (1.10) теорема Коши о существовании и единственности решения может быть сформирована следующим образом.

Теорема. Если функция $f_1(x)$ непрерывна в интервале $(a;b)$, функция $f_2(y)$ и ее производная по у непрерывна в интервале $(c;d)$, то для любых начальных данных $x_0 \in (a;b)$, $y_0 \in (c;d)$ существует, причем единственное, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.10), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Другими словами, при указанных условиях через любую точку прямоугольника $a < x < b$, $c < y < d$ проходит, и при том единственная, интегральная кривая уравнения (1.1).

Если $f_2(y) \neq 0$, то уравнение с разделяющимися переменными (2.10) можно переписать в виде *(разделить переменные)*

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{1.11}$$

Определение. Уравнение вида (1.11) называется уравнением с разделяющимися переменными.

Теорема. Если существуют интегралы $\int \frac{dy}{f(y)}$ и $\int f_1(x)dx$, то общий интеграл уравнения с разделенными переменными (1.11) задается уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C,$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ – некоторые первообразные соответственно функций – $\frac{1}{f_2(y)}$ и $\frac{1}{f_1(x)}$.

Доказательство. Допустим, что функция $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (1.11). Подставляя в (1.11), получим тождество относительно переменной x:

$$\frac{\varphi'(x)dx}{f_2(\varphi(x))} = f_1(x)dx.$$

Интегрируя это тождество по x, найдем:

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{f_2(\varphi(x))} = \int f_1(x)dx + C$$

или, учитывая, что $y = \varphi(x)$ и $dy = \varphi'(x)dx$, по правилу подстановки в неопределенном интеграле имеем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \tag{1.12}$$

или

$$F_2(y) = F_1(x) + C, \tag{1.13}$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$– некоторые первообразные соответственно функций $\dfrac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

Итак, любое решение дифференциального уравнения (1.11) удовлетворяет уравнению (1.13). Обратно, если некоторая функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет равенству (1.13), то она удовлетворяет и равенству (1.12), но тогда имеет место все предыдущие равенства, включая и (1.11). Таким образом, равенство (1.13) определяет общий интеграл уравнения (1.11).

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (1.10) можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) разделить переменные;

2) интегрируя почленно полученное уравнение с разделяющимися переменными (1.11), найти его общий интеграл (1.13);

3) выяснить, имеет ли уравнение (1.10) решения, не получающиеся из общего интеграла (1.13);

4) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (если это требуется).

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$2yy' = 1 - 3x^2$,если $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$.

Решение. Заменяем y' на $\dfrac{dy}{dx}$, получим $2y\dfrac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$, отсюда $2y\,dy = \left(1 - 3x^2\right)dx$.

Интегрируя обе части последнего неравенства,
найдем $\int 2y\,dy = \int\left(1 - 3x^2\right)dx$, или $2\int y\,dy = \int dx - 3\int x^2\,dx$,
или $2 \cdot \dfrac{y^2}{2} = x - \dfrac{3x^2}{3} + C$, т.е. $y^2 = x - x^2 + C$.

Подставив начальное значение $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, найдем C: $9 = 1 - 1 + C$, т.е. $C = 9$.

Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2 = x - x^3 + 9$, или $x^3 + y^2 - x - 9 = 0$.

2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция $g(x,y)$ называется однородной функцией $\kappa-$го порядка, если при любом t имеет место тождество

$$g(tx,ty) = t^k g(x,y). \qquad (1.14)$$

Например, $g(x,y) = 2x^3 - 5xy^2$ - однородная функция третьего порядка, т.к.

$$g(tx,ty) = 2(tx)^3 - 5tx(ty)^2 = 2t^3x^3 - 5t^3xy^2 =$$
$$= t^3\left(2x^3 - 5xy^2\right) = t^3 g(x,y).$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется *однородным*, если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка.

Однородное дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = z \cdot x$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример 4. Найти решения уравнения

$$\left(x^2 - 2y^2\right)dx + 2xy\,dy = 0.$$

Решение. В данном уравнении функция $P(x,y) = x^2 - 2y^2$, $Q(x,y) = 2xy$ - однородные второго порядка, тогда $\left(x^2 - 2y^2\right) = -2xy\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx} = y' = -\dfrac{x^2 - 2y^2}{2xy}$ - однородная нулевого порядка.

Положим $y = z \cdot x$, откуда $y' = z'_x \cdot x + z \cdot x'_x = z'_x \cdot x + z$. Подставим эти выражения в данное уравнение $z'_x \cdot x + z = -\dfrac{x^2 - 2z^2 \cdot x^2}{2x \cdot z \cdot x}$, т.е.

$z'_x \cdot x + z = \dfrac{2z^2 - 1}{2z}$, или $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{2z^2 - 1}{2z} - z$, приведем правую часть к общему знаменателю, получим $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{2z^2 - 1 - 2z^2}{2z}$, или

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = -\frac{1}{2z}.$$

Умножим правую и левую части на dx: $dz \cdot x = -\dfrac{1}{2z}dx.$

Умножим правую и левую части на $2z$ и разделим на x, получим: $2z\,dz = -\dfrac{dx}{x}$.

Проинтегрируем почленно это уравнение:

$\int 2z\,dz = -\int \dfrac{dx}{x}$, откуда $z^2 = -\ln|x| + \ln|C|$, т.е. $z^2 = -\ln\dfrac{|C|}{|x|}$,или

$\dfrac{C}{x} = e^{z^2}$,откуда $x = c \cdot e^{-z^2}$.

Возвращаясь к прежней функции y, находим общий интеграл $x = C \cdot e^{-\frac{y^2}{x^2}}$.

3. *Линейные дифференциальные уравнения первого порядка*

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$называется *линейным*, если имеет следующий вид:

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x), \tag{1.16}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$– заданные функции от x. Приведем теорему Коши для линейных уравнений первого порядка.

Теорема Коши. Пусть $(a;b)$ интервал, в котором функция $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывна. Тогда для любых $x_0 \in (a;b)$ и $y_0 \in (-\infty;+\infty)$ задача Коши с начальными значениями $(x_0;y_0)$ имеет единственное решение, т.е. существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (1.16), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Нахождение общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка (1.16) сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделенными переменными с помощью подстановки

$$y = u \cdot v, \tag{1.17}$$

где u и v– неизвестные функции от x. Из (1.17) находим $y' = u'_x v + u v'_x$ или

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}. \tag{1.18}$$

Подставив значения y и y' в уравнение (1.16), получаем

$u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx} + P(x)\cdot u \cdot v = Q(x)$, или

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)\cdot u\right) = Q(x). \tag{1.19}$$

Так как искомая функция y подстановкой (1.17) представлена в виде произведения двух функций u и v, то одну из них, например u, мы можем выбрать по нашему усмотрению, кроме $u = 0$. Выберем функцию так, чтобы

$$\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u = 0, \tag{1.20}$$

т.е. в качестве функции возьмем одно из частных решений u^* уравнения (1.20). Решая уравнение (1.20) как уравнение с разделяющимися переменными, найдем отличную от нуля функцию $u^* = e^{-\int P(x)dx}$.

Так как функция u^* является решением уравнения (1.20), то после ее подстановки в уравнение (1.19) получим

$$u^* \frac{dv}{dx} = Q(x), \text{ т.е. } dv = \frac{Q(x)}{u^*(x)} dx. \tag{1.21}$$

Решив уравнение (1.21) как уравнение с разделенными переменными, в котором u^* известна, найдем функцию $v = v(x, C)$, содержащую произвольную постоянную C и являющуюся общим решение уравнения (1.21).

Заменив в равенстве $y = u \cdot v$ функции u и v найденными значениями, получим решение $y = u^*(x) \cdot v(x, C)$ уравнения (1.16), содержащее вместе с функцией v и произвольную постоянную C.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$\left(1 + x^2\right) y' - xy = 2x.$$

Решение. Разделив все члены данного уравнения на $\left(1 + x^2\right) \neq 0$, приведем его к виду (1.16)

$$y' - \frac{xy}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2} \quad . \tag{1.22}$$

Здесь $P(x) = -\dfrac{x}{1 + x^2}$, $Q(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Положим $y = u \cdot v$, откуда $y' = u \dfrac{dv}{dx} + v \dfrac{du}{dx}$.

Подставим эти значения y и y' в уравнение (1.22):

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - \frac{xuv}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например v, и вынесем v за скобку

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} - \frac{x \cdot u}{1 + x^2} \right) = \frac{2x}{1 + x^2}. \tag{1.23}$$

Выберем функцию $u \neq 0$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е.

$$\frac{du}{dx} - \frac{xu}{1 + x^2} = 0. \tag{1.24}$$

Тогда уравнение (1.23) примет вид

$$u\frac{dv}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}. \tag{1.25}$$

Решаем уравнение (1.24) как уравнение с разделяющимися переменными (при $u\neq 0$):

$$\frac{du}{dx}-\frac{xu}{1+x^2}=0\text{, т.е. }\frac{du}{u}=\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Интегрируем почленно это уравнение:

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{x\,dx}{1+x^2}\text{ ,или }\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}.$$

т.к. $d\left(1+x^2\right)=\left(1+x^2\right)'dx=2x\,dx$, откуда $x\,dx=\frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)$

т.е. $\ln|u|=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|$, откуда

$$u=\sqrt{1+x^2}. \tag{1.26}$$

Подставив значение функции u в уравнение (1.25), найдем

$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dv}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}\text{, т.е. }dv=\frac{2x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интегрируя почленно

$$\int dv=\int\frac{2x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\text{, или }\int dv=\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(1+x^2\right)\text{, т.к. }d\left(1+x^2\right)=2x\,dx.$$

Откуда $v=\dfrac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C$, или $v=\dfrac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C$ или

$$v=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+C. \tag{1.27}$$

Заменив в подстановке $y=u\cdot v$ функции u и v их выражениями из равенств (1.26) и (1.27), получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y=\sqrt{1+x^2}\left(C-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\right)\text{, или }y=C\sqrt{1+x^2}-2.$$

1.Уравнения с разделяющимися переменными	$y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$	$\int\frac{dy}{f(y)}=\int f_1(x)dx$

2. Однородные уравнения 1 -го порядка	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$\frac{y}{x} = z(x) = z$, $y = x \cdot z$, $y' = z + x \cdot z'$
3. Линейные уравнения 1-го порядка	$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$	$y = u \cdot v$, $y' = u'_x v + u v'_x$
4. Уравнения Бернулли	$y' + P(x) \cdot y = Q(x) y^{\alpha}$	$y = u \cdot v$, $y' = u'_x v + u v'_x$

§2 Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Определение. *Дифференциальным уравнением второго порядка* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения второго порядка имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям

$$x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)},$$

если

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \quad .... \quad , \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Определение. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши) [2].

Если функция $(n\text{-}1)$ *–й переменных вида* $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *в некоторой области D* $(n\text{-}1)$*- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$*, то какова бы не была точка (* $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$*) в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$*, определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0*, удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

1. ***Дифференциальные уравнения, содержащие только n производную и некоторую функцию от x***

Это уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n;$$

Простейший тип таких уравнений второго порядка – это $y'' = f(x)$. Данное уравнение не содержит функцию y в явном виде, ни её первой производной y'.

Уравнение такого типа решается последовательным интегрированием два раза. Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y' = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2.$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0;\ y_0 = 1;\ y'_0 = -1.$

Решение.

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2;$$

Подставим начальные условия:

$$y_0 = 1{:} -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$y'_0 = -1{:}\ -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1.$$

Решив систему из двух уравнений с двумя неизвестными, получим

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}.$$

Следовательно, частное решение (решение задачи Коши) имеет вид:

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x.$$

2. Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка k – 1 включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = p; \quad y^{(k+1)} = p'; \quad \dots \quad y^{(n)} = p^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$p = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Пример 5. Решить уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

Решение. Положим $y' = p; \quad y'' = p'$ тогда уравнение примет вид

$$p' + \frac{p}{x} = x.$$

Получили линейное уравнение первого порядка относительно функции $p = p(x)$.

Решаем его подстановкой $p = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$; $p' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{x} = x;$$

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + u \cdot v' = x;$$

$$u' + \frac{u}{x} = 0; \qquad \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0; \qquad \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} = 0;$$

$$\ln u + \ln x = 0; \qquad u = \frac{1}{x;}$$

$$u \cdot v' = x; \qquad \frac{1}{x} \cdot v' = x; \qquad v' = x^2; \qquad \frac{dv}{dx} = x^2;$$

$dv = x^2 dx$. Откуда $v = \dfrac{x^3}{3} + c_1$.

Функция

$$p = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right).$$

Исходное уравнение решалось подстановкой $y' = p$. Поэтому

$$y' = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$y = \frac{x^3}{9} + c_1 \ln x + c_2$$

Это и есть общее решение исходного уравнения.

3. ***Уравнения, не содержащие явно независимой переменной x***

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ или второго порядка $F(y,\ y',\ y'') = 0.$ Это уравнение, не содержащее явно независимую переменную x.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных

$$y' = p(y)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Для дифференциального уравнения второго порядка получим замену $y' = p(y)$, где $p = p(y) -$ вспомогательная функция.

Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

Подставив $y' = p$ *и* $y'' = p \cdot p'$ в данное уравнение, получим уравнение $F(y, p,\ p') = 0$ – дифференциальное уравнение первого порядка относительно p как функции от y. В котором под p' понимается производная по переменной y.

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$2y \cdot y'' + y'^2 = 0.$$

Решение. Полагая $y' = p,\ y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$, получим

$$2y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0.$$

это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Приведя его к виду

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}$$

и интегрируя, получим

$$\ln p = -\frac{1}{2}\ \ln y + \ln\ c_1;\ \ln p = \ln \frac{c_1}{\sqrt{y}},\ \ p = \frac{c_1}{\sqrt{y}}.$$

Так как исходное уравнение решалось с помощью подстановки $p = y'$, получим $y' = \dfrac{c_1}{\sqrt{y}}$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно искомой функции y от x.

$$\sqrt{y} \cdot dy = c_1 \cdot dx.$$

$$\int \sqrt{y}\, dy = \int c_1\, dx; \qquad \frac{2y^{3/2}}{3} = c_1 x + c_2; \qquad y^{3/2} = \frac{3}{2} c_1 \cdot x + \frac{3}{2} c_2.$$

Но так как c_1 и c_2 – произвольные постоянные, $\left(\dfrac{3}{2} \cdot c_1\right)$ $\left(\dfrac{3}{2} \cdot c_2\right)$ – также произвольные постоянные. Поэтому полученный общий интеграл данного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$y^{3/2} = c_1 \cdot x + c_2,$$

т.е.

$$\sqrt{y^3} = c_1 x + c_2,$$

или

$$y = \sqrt[3]{\left(c_1 x + c_2\right)^2}.$$

§4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида [4]

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1.35}$$

где p и q – постоянные величины.

Теорема Коши для линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (1.35) формируется следующим образом.

Теорема Коши. При любых начальных данных $(x_0; y_0; y_0')$ задача Коши имеет, причем единственное, решение, т.е. при любых начальных данных x_0, y_0, y_0' существует, причем единственное, решение уравнения (1.35), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = x_0, y'(x_0) = y_0'$.

Определение. Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (2.35) образуют *фундаментальную систему решений*, если для любого x

$$W(x) = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x) \neq 0. \tag{1.36}$$

Определение. Выражение $W(x)$ называется определителем Вронского, или вронскианом, решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Пример 1. Известно, что функции $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$ и $y_3 = 5e^{2x}$ являются частными решениями уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Доказать, что решение y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений, а y_1 и y_3 не образуют.

Решение. $y_1' = 2e^{2x}$, $y_2' = e^x$, $y_3' = 5 \cdot 2e^{2x}$.

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_2:

$$W_1(x) = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x) =$$

$$= e^{2x} \cdot e^x - 2e^{2x} \cdot e^x = -e^{3x} \neq 0.$$

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_3

$$W_2(x) = y_1(x) \cdot y_3'(x) - y_1'(x) \cdot y_3(x) =$$

$$= e^{2x} \cdot 10e^{2x} - 2e^{2x} \cdot 5e^{2x} = 10e^{4x} - 10e^{4x} = 0.$$

Вронскиан $W_1(x) \neq 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *образуют фундаментальную пару решений.*

Вронскиан $W_2(x) = 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_3(x)$ не образуют *фундаментальную пару решений.*

Теорема (о структуре общего решения). *Если два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами образуют фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{1.37}$$

где C_1 и C_2 –произвольные постоянные.

Выражение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ называется *линейной комбинацией функций* $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Доказательство: докажем, что функция (1.37) является решением уравнения (1.35). Для этого подставим в уравнение (1.35) вместо y линейную комбинацию (1.37) и докажем, что оно превращается в тождество. Так как y_1, y_2 и являются решениями уравнения (1.35), то

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \text{ и } y_2'' + py_2' + qy_{2=0}. \qquad (1.38)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
&(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) = \\
&= C_1y_1'' + C_2y_2'' + pC_1y_1' + pC_2y_2' + qC_1y_1 + qC_2y_2 = \\
&= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0.
\end{aligned}$$

А это означает, что функция (1.37) является решением уравнения (1.35).

Теперь докажем, что формула (1.37) представляет общее решение уравнения (1.35). Для этого надо показать, что любое решение уравнения (1.35) можно получить из формулы (1.37) при некоторых значениях постоянных C_1 и C_2. Пусть $y = \varphi(x)$ – какое-либо частное решение уравнения (1.35). Пусть, далее, x_0 некоторое число из области определения решения $y = \varphi(x)$; обозначим $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$. Отсюда следует, что решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям с начальными данными (x_0, y_0, y_0'). Осталось показать, что решение $y = \varphi(x)$ может быть получено из формулы (1.37) при надлежащих значениях $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$. Для этого рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \\ y_0' = C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x), \end{cases} \qquad (1.39)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$– решение из данной фундаментальной системы решений, (x_0, y_0, y_0')–полученные выше начальные данные; C_1 и C_2–неизвестные, которые предстоит определить. Умножая первое уравнение из (1.39) на $y_2'(x_0)$, второе – на $y_2(x_0)$ и вычитая второе уравнение из первого, получим

$$\begin{aligned}
&(y_1(x_0) \cdot y_2'(x_0) - y_2'(x_0) \cdot y_2(x_0)) \cdot C_1 = \\
&= y_0 \cdot y_2'(x_0) - y_0' \cdot y_2(x_0),
\end{aligned}$$

или $W(x_0) \cdot c_1 = y_0 \cdot y_2'(x_0) - y_0' \cdot y_2(x_0)$,

откуда ввиду того, что $W(x_0) \neq 0$, найдем

$$C_1 = C_{10} = \frac{y_0 \cdot y_2'(x_0) - y_0' \cdot y_2(x_0)}{W(x_0)}.$$

Аналогично получаем

$$C_2 = C_{20} = -\frac{y_0 \cdot y_2'(x_0) - y_0' \cdot y_1(x_0)}{W(x_0)}.$$

Рассмотрим сейчас частное решение, которое получается из (1.37), если взять $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$: $y(x) = C_{10} \cdot y_1(x) + C_{20} \cdot y_2(x)$. Ввиду (1.39) составленное решение $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям с начальными данными (x_0, y_0, y'_0), т.е. $y(x_0)=\varphi(x_0)$, $y'(x_0)=\varphi'(x_0)$.

Следовательно, согласно теореме Коши о единственности решения, удовлетворяющего данным начальным условиям, имеем

$$\varphi(x)=y(x)=C_{10}\cdot y_1+C_{20}\cdot y_2. \qquad (1.40)$$

Найдем решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения уравнения (1.35) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Будем искать эти частные решения уравнений (1.35) в виде

$$y=e^{kx}, \qquad (1.41)$$

где k=const; тогда

$$y'=ke^{kx},\ y''=k^2\cdot e^{kx}.$$

Подставим выражение для y, y' и y'' в уравнение (1.35), получим

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0,\ \text{т.е.}\ e^{kx}\left(k^2+pk+q\right)=0.$$

Так как $e^{kx}\neq 0$, то

$$k^2+pk+q=0. \qquad (1.42)$$

Определение. Уравнение (1.42) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для составления характеристического уравнения (1.42) достаточно в уравнении (1.35) заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1.

Решив характеристическое уравнение по формуле: $k_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$, найдем его корни k_1 и k_2, а следовательно, и частные решения уравнения (1.35):

$$y_1=e^{k_1x},\ y_2=e^{k_2x}. \qquad (1.43)$$

При решении характеристического уравнения возможны три случая.

Случай 1. *Корни характеристического уравнения действительны и различны*.

В этом случае имеем два частных решения уравнения (1.35):

$$y_1=e^{k_1x}\ \text{и}\ y_2=e^{k_2x}.$$

Покажем, что эти решения образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x)=y_1(x)y'_2(x)-y'_1(x)y_2(x)=e^{k_1x}k_2e^{k_2x}-$$
$$-k_1e^{k_1x}e^{k_2x}=k_2e^{(k_1+k_2)x}-k_1e^{(k_1+k_2)x}=e^{(k_1+k_2)x}\left(k_2-k_1\right)\neq 0,$$

т.е. $e^{(k_1+k_2)x}\neq 0$ и $k_2\neq k_1$.

Следовательно, в этом случае решение общего уравнения (1.35) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{1.44}$$

Случай 2. *Корни характеристического уравнения действительны и равны*: $k_1 = k_2 = k$.

В этом случае непосредственно находим лишь одно частное решение: $y_2 = xe^{kx}$.

Вторым частным решением является решение $y_2 = xe^{kx}$.Действительно,

$$y_2' = \left(xe^{kx}\right) = x'e^{kx} + x\left(e^{kx}\right)' = e^{kx} + xke^{kx} = e^{kx}(1+kx),$$

$$y_2'' = \left(e^{kx}\right)'(1+kx) + e^{kx}(1+kx)' = ke^{kx}(1+kx) + e^{kx}k =$$
$$= e^{kx}\left(2k + k^2 x\right).$$

Подставим выражение для y, y' и y'' в уравнение (1.35), получим

$$e^{kx}\left(2k + k^2 x\right) + pe^{kx}(1+kx) + qxe^{kx} =$$
$$= e^{kx}\left[x\left(k^2 + pk + q\right) + 2k + p\right] = 0.$$

Так как k является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, корни квадратного трехчлена находятся по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Если $k_1 = k_2 = k$, то $p^2 - 4q = 0$, т.е. $k = -\dfrac{p}{2}$ или $2k + p = 0$.

Покажем, что $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{kx}e^{kx}(1+kx) =$$
$$= e^{2kx}[1 + kx - kx] = e^{2kx} \neq 0.$$

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \tag{1.45}$$

Случай 3. *Корни характеристического уравнения комплексные*:

$k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, $p^2 - 4q < 0$.

Тогда $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{i^2\left(4q - p^2\right)}}{2} = -\dfrac{p}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Обозначив $a = \dfrac{-p}{2}$ и $b = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, получим: $k_1 = a + bi$ и $k_2 = a - bi \quad (b \neq 0)$.

В этом случае $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$ являются решениями уравнения (1.35) и, вычисляя вронскиан, убедимся, что они составляют фундаментальную систему. Действительно,

$$y_1' = \left(e^{ax}\right)' \cdot \cos bx + e^{ax} \cdot (\cos bx)' = a \cdot e^{ax} \cdot \cos bx +$$
$$+ e^{ax} \cdot (-\sin bx) \cdot b = e^{ax} \cdot (a \cdot \cos bx - b \cdot \sin bx).$$
$$y_2' = \left(e^{ax}\right)' \cdot \sin bx + e^{ax} \cdot (\sin bx)' = a \cdot e^{ax} \cdot \sin bx +$$
$$+ e^{ax} \cdot \cos bx \cdot b = e^{ax}(a \cdot \sin bx + b \cdot \cos bx).$$

Подставим выражения для $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_2(x)$ и $y_2'(x)$ в вронскиан (1.36), получим:

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{ax}\cos bx\, e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx) -$$
$$- e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)e^{ax}\sin bx = e^{2ax}\cos bx(a\sin bx + b\cos bx) -$$
$$- e^{2ax}\sin bx(a\cos bx - b\sin bx) = e^{2ax}\big(a\cos bx\sin bx + b\cos^2 bx -$$
$$- a\sin bx\cos bx + b\sin^2 bx\big) = e^{2ax}b\left(\cos^2 bx + \sin^2 bx\right) = e^{2ax}b \neq 0.$$

При вычислении воспользовались основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Таким образом, общее решение уравнения (1.35) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$y = C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax}\sin bx$, или

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx). \tag{1.46}$$

Рассмотрим примеры решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y'' + 7y' + 12y = 0$ удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2 + 7k + 12 = 0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 12}}{2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{-7 \pm 1}{2}$,

откуда $k_1 = -3$ и $k_2 = -4$. Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу (1.44), получим общее решение $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$.

Дифференцируя общее решение, получим

$$y' = C_1 e^{-3x}(-3) + C_2 e^{-4x}(-4) = -3C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{-4x}.$$

Согласно заданным начальным условиям имеем

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^{-3\cdot 0} + C_2 e^{-4\cdot 0} \\ -2 = -3C_1 e^{-3\cdot 0} - 4C_2 e^{-4\cdot 0} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -2 = -3C_1 - 4C_2 \end{cases},$$

или $\begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ -2 = -3C_1 - 4(1 - C_1) \end{cases}$, или $\begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ 2 = C_1 \end{cases}$, откуда

$C_1 = 2$ и $C_2 = -1$. Таким образом, искомым частным решением является функция

$$y = 2e^{-3x} - e^{-4x}.$$

Пример 4. Найти решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2 + 8k + 16 = 0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{2} = \dfrac{-8 \pm 0}{2} = -4$, откуда $k_1 = k_2 = -4$. Подставляя найденные значения k в формулу (1.45), получим общее решение

$$y = e^{-4x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x).$$

Пример 5. Найти решение уравнения $y'' + 9y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 9 = 0$

$k^2 = -9$; $\quad k_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9 \cdot (-1)} = \pm 3 \cdot i$. Уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2} = \pm 3i \quad (a = 0; \quad b = 3)$.

По формуле (1.46) общим решением будет

$$y = e^{0x}(C_1 \cdot \cos\ 3x + C_2 \sin\ 3x),$$

или $y = C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x$.

§5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное уравнение отличается от однородного уравнения функцией в правой части. Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \tag{1.47}$$

а соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,$$

которое, как известно, решается с помощью характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Сформулируем теорему о структуре общего решения неоднородного уравнения (1.47).

Теорема (о структуре общего решения). Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пусть *y* – общее решение уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$,

$y_ч$ − какое-либо частное решение неоднородного уравнения, y_0 − общее решение соответствующего однородного уравнения.

Тогда

$$y = y_0 + y_ч.$$

Таким образом, основная задача при решении неоднородного линейного дифференциальные уравнения второго порядка состоит в нахождении какого-либо частного решения.

На практике удобно применять метод *вариации произвольных постоянных.*

1. *Метод вариации произвольных постоянных.*

При реализации этого метода сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде [5]:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2;$$

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2;$$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Решение. Решаем линейное однородное уравнение $y'' + y = 0.$

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется по формуле $y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$. В данном случае $\alpha = 0; \quad \beta = 1$. Откуда

$$y = A\cos x + B\sin x;$$

Заменяя коэффициенты A и B функциями от x, ищем решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$$

Для определения неопределённых коэффициентов $A(x)$ и $B(x)$ составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0; \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x}; \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x; \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x). \end{cases}$$

Из соотношения $A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ найдем функцию *A(x)*.

$$A(x) = \int \left(2\sin^2 x\cos x - x\sin x\right)dx = 2\int \sin^2 x\cos x dx - \int x\sin x dx =$$

$$\frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \sin x dx; \\ du = dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int \cos x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Аналогично вычисляем *B(x)*.

$$B(x) = \int x\cos x dx - 2\int \cos^2 x\sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x; \end{matrix} \right\} =$$

$$= x\sin x - \int \sin x dx + \frac{2}{3}\cos^3 x = \frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1\cos x + \frac{2}{3}\sin x\cos^3 x +$$

$$+ x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2\sin x = \frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) +$$

$$+ x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Окончательно получим решение в виде:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим ещё один из методов нахождения частного решения неоднородного уравнения, когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид. К таким функциям $f(x)$ относятся следующие функции: экспонента $e^{\alpha x}$ $(\alpha = \text{const}t)$; многочлены n-й степени относительно переменной x $P_n(x)$; тригонометрические функции $\cos nx$; $\sin nx$, а также их произведения.

2. *Метод неопределенных коэффициентов*

Этот метод иначе называется методом подбора частного решения $y_ч$ – уравнения (1.47) по виду правой части $f(x)$ [6].

Пусть правая часть $f(x)$ *уравнения* (1.47) *имеет вид* $f(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, т. е. представляет собой произведение экспоненты на многочлен, где $\alpha - \text{const}$; $P_n(x) -$ многочлен n-й относительно x. В этом случае уравнение примет вид

$$y'' + p\cdot y' + q\cdot y = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}. \qquad (1.48)$$

Тогда возможны следующие варианты.

1)Число α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Тогда частное решение нужно искать в виде $y_ч = Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$– многочлен той же степени, что и данный многочлен $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

2)Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с одним корнем характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_ч = Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x$.

3)Число α есть двукратный корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с двумя равными корнями характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_ч = Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x^2$. Неизвестные (неопределенные) коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ находим из условия, что функция $y_ч$ является решением уравнения (11.48), т. е. удовлетворяет этому уравнению.

Пусть правая часть $f(x)$ *уравнения* (1.47) имеет вид

$$f(x) = M\cdot\cos\beta x + N\cdot\sin\beta x,$$

где M *и* N – постоянные числа. Тогда вид частного решения $y_ч$ определяется следующим образом.

а) Если число βi не есть корень характеристического уравнения , то частное решение $y_ч$ имеет вид

$$y_ч = A\cdot\cos\beta x + B\cdot\sin\beta x,$$

где A и B – постоянные неопределенные коэффициенты.

б) Если число βi есть корень характеристического уравнения, то

$$y_ч = \left(A \cdot \cos\ \beta x + B \cdot \sin\ \beta x\right) \cdot x.$$

Сделаем важное замечание. Даже тогда, когда в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos\ \beta x$ или только $\sin\ \beta x$, следует искать частное решение в том виде, в каком оно было указано, т. е. с синусом и косинусом. Иными словами, из того, что правая часть не содержит $\cos\ \beta x$ или $\sin\ \beta x$, не следует, что частное решение уравнения не содержит этих функций.

На основании вышеизложенного можно составить таблицу, которой удобно пользоваться при решении дифференциальных уравнений:

<table>
<tr><td colspan="3">Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$.
Заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1. $k^2 + pk + q = 0$ (*).
Найти $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.</td></tr>
<tr><td>Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны</td><td>$k_2 \neq k_1$</td><td>$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$</td></tr>
<tr><td>Случай 2. Корни характеристического уравнения действительны и равны</td><td>$k_1 = k_2 = k$</td><td>$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)$</td></tr>
<tr><td>Случай 3. Корни характеристического уравнения комплексные:</td><td>$p^2 - 4q < 0$ Введем $i^2 = -1$.Тогда $p^2 - 4q = i^2\left(4q - p^2\right)$
или
$k_{1,2} = a \pm bi$</td><td>$y = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка
с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$, $y = y_ч + y_o$,
y_o – решение однородного уравнения, $y_ч$ – частное решение неоднородного .</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Случай 1.
$f(x) = P_n(x) \cdot e^{ax}$</td><td>$a \neq k_1, a \neq k_2$</td><td>$y_ч = Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>$a = k_2 \neq k_1$</td><td>$y_ч = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>$a = k_2 = k_1$</td><td>$y_ч = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>Случай 2.</td><td colspan="2">$z = a + bi$ не является корнем характеристического уравнения (*)
$y_ч = e^{ax}\left(S_n(x) \cos bx + T_n(x) \sin bx\right)$</td></tr>
</table>

$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)+$ $+Q_n(x))$	$z=a+bi$ является корнем характеристического уравнения (*) $у_ч=xe^{ax}\left(S_n(x)\cos bx+T_n(x)\sin bx\right)$

Рассмотрим примеры, на которых покажем не только принцип применения метода, но и *порядок оформления* решения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''+7y'+12y=24x^2+16x-15.$$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2+7k+12=0.$$

$$k_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{-7\pm1}{2}.$$

$$k_1=-3; \qquad k_2=-4.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$:

$$y_0=C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot e^{-4x}.$$

3) Запишем формулу, по которой следует искать частное решение $y_ч$ данного уравнения. Для этого сравним правую часть уравнения $f(x)=24x^2+16x-15$ с общим видом правой части:

$$f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n(x).$$

$24x^2+16x-15$ – многочлен второй степени с коэффициентами 24; 16; –15.

В данном случае показательная функция $e^{\alpha x}=1$, т. е. $\alpha=0$. Так как $\alpha=0$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения $(k_1=-3;\ \ k_2=-4)$, частное решение нужно искать в виде $y_ч=Ax^2+Bx+C.$

$Q_n(x)=Ax^2+Bx+C-$ многочлен второй степени $(n=2)$, неизвестные (неопределенные) коэффициенты *A, B, C* этого многочлена нужно найти, подставив выражения $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ в данное уравнение.

4) Запишем $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 12 & y_ч=Ax^2+Bx+C; \\ 7 & y_ч'=2Ax+B; \\ 1 & y_ч''=2A. \end{array}$$

Слева указаны коэффициенты 12, 7, 1, на которые следует умножить $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$, чтобы получить левую часть уравнения $y''+7y'+12y=24x^2+16x-15.$ В левой части получим многочлен второй степени с неопределенными коэффициентами, который должен быть равен данному многочлену второй степени в правой части. Два многочлена будут равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях *x*. Запишем столбиком полученные уравнения:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^2 & 12A = 24; \\ x^1 & 14A + 12B = 16; \\ x^0 & 2A + 7B + 12C = -15. \end{array}\right\}$$

Имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными коэффициентами *A, B, C*.

Решив ее, найдем $A = 2, \quad B = -1, \quad C = -1$.

Частное решение: $y_ч = 2x^2 - x - 1.$

5) Общее решение данного уравнения:

$$y = y_0 + y_ч,$$

или

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x} + 2x^2 - x - 1.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + k - 2 = 0, \qquad k_1 = -2; \quad k_2 = 1.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

3)Сравним правую часть данного дифференциального уравнения $f(x) = 3e^x$ с $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$. Отметим, что $\alpha = 1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения; многочлен – число 3 – нулевой степени, т. е. $n = 0$. Поэтому частное решение $y_ч$ следует искать в виде $y_ч = A \cdot e^x \cdot x.$

4) Запишем

$$\begin{array}{r|l} -2 & y_ч = A \cdot e^x \cdot x, \\ 1 & y_ч' = A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x, \\ 1 & y_ч'' = A \cdot e^x + A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x. \end{array}$$

Подставив выражения $y_ч, y_ч', y_ч''$ с указанными коэффициентами в данное дифференциальное уравнение, получим

$$2A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x + A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x - 2A \cdot e^x \cdot x = 3e^x,$$

или

$$3A \cdot e^x = 3e^x,$$

откуда $A=1$. Частное решение: $y_ч = x\cdot e^x$.

5) Искомое общее решение данного уравнения:

$$y = C_1\cdot e^{-2x} + C_2\cdot e^x + x\cdot e^x.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - y = x\cdot e^{-x}$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 1 = 0; \qquad k_1 = -1; \qquad k_2 = 1.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^x.$$

3)Сравним правую часть данного уравнения $f(x) = x\cdot e^{-x}$ с $f(x) = e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$. Отмечаем, что $\alpha = -1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения и многочлен x степени $n=1$. Поэтому частное решение следует искать в виде $y_ч = (Ax+B)\cdot x\cdot e^{-x}$.

4) Так как требуется найти $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$, удобнее записать $y_ч$ в виде $y_ч = \left(Ax^2 + Bx\right)\cdot e^{-x}$.

Запишем $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l}
-1 & y_ч = \left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}, \\
0 & y_ч' = (2Ax+B)\cdot e^{-x} - \left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}, \\
1 & y_ч'' = 2A\cdot e^{-x} - (2Ax+B)\cdot e^{-x} - (2Ax+B)\cdot e^{-x} + \left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}.
\end{array}$$

Подставим выражения $y_ч$, $y_ч''$ с указанными коэффициентами в данное уравнение. Получим равенство

$$2A\cdot e^{-x} - 2(2Ax+B)\cdot e^{-x} + \left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x} - \left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x} = x\cdot e^{-x}.$$

Разделим уравнение на $e^{-x} \neq 0$ и упростим:

$$2A - 2(2Ax+B) = x,$$

$$2A - 4Ax - 2B = x.$$

$$\begin{array}{r|r} x^1 & -4A = 1; \\ x^0 & 2A - 2B = 0, \end{array}\Bigg\} \qquad \begin{cases} A = -1/4; \\ B = -1/4. \end{cases}$$

Частное решение: $y_ч = -\dfrac{1}{4}\left(x^2 + x\right)\cdot e^{-x}$.

5)Общее решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^x - \frac{1}{4}\left(x^2+x\right)\cdot e^{-x}.$$

Пример 5. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = 4\sin 3x + 2\cos 3x$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 + 3k + 2 = 0;$

$k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2}.$

$k_1 = -1; \qquad k_2 = -2.$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x}.$$

3) Сравним правую часть уравнения $f(x) = 4\sin 3x + 2\cos 3x$ с $f(x) = M \cdot \cos \beta x + N \cdot \sin \beta x$. Здесь $M = 2, \quad N = 4; \ \alpha = 0, \quad \beta = 3.$ Так как числа $\pm \beta i = \pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, частное решение следует искать в виде $y_ч = A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x.$

4) Найдем $y_ч'$, $y_ч''$ и запишем столбиком

$$\begin{array}{c|l} 2 & y_ч = A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x, \\ 3 & y_ч' = -3A \cdot \sin 3x + 3B \cdot \cos 3x, \\ 1 & y_ч'' = -9A \cdot \cos 3x - 9B \cdot \sin 3x. \end{array}$$

Подставив эти выражения в данное дифференциальное уравнение, получим

$-9A \cdot \cos x - 9B \cdot \sin 3x - 9A \cdot \sin 3x + 9B \cdot \cos 3x + 2A \cdot \cos 3x + 2B \cdot \sin 3x =$
$= 4\sin 3x + 2\cos 3x$ или

$\sin 3x \cdot (-7B - 9A) + \cos 3x \cdot (-7A + 9B) = 4\sin 3x + 2\cos 3x.$

Приравниваем коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$ в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} \sin 3x & -7B - 9A = 4; \\ \cos 3x & -7A + 9B = 2, \end{array}\Bigg\}$$

$$A = -\frac{5}{13}; \qquad B = -\frac{1}{13}.$$

Частное решение: $y_ч = -\dfrac{5}{13}\cos 3x - \dfrac{1}{13}\sin 3x.$

5) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{5}{13}\operatorname{cox} 3x - \frac{1}{13}\sin 3x.$$