# Матрицы и действия над ними

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время линейная алгебра, к элементам которой относятся матрицы, является наиболее широко используемым аппаратом для всех разделов чистой и прикладной математики. На ее основе излагаются многие современные математические теории ( аналитическая геометрия, ряды Фурье и др.), описываются различные технические и экономические процессы.

Такое проникновение линейной алгебры во многие области человеческой деятельности не случайно, так как объекты, над которыми можно производить операции сложения и умножения на число, встречаются в алгебре, геометрии, анализе, физике, технике, экономике и т.д.

Матрицы обобщают понятие вектора и успешно используются при исследовании и решении систем линейных уравнений, при установлении корреляционной зависимости случайных величин в статистике, в задачах диагностики при установлении функциональных связей элементов некоторой технической системы и во многих других теоретических вопросах и практических задачах.

Все это говорит о целесообразности ознакомления с понятием матрицы и линейными операциями над нею, с матричным способом решения систем линейных уравнений.

## 1.Основные понятия.

Многие явления окружающей действительности удобно записывать в виде прямоугольных таблиц чисел.

Пусть, например, на некотором предприятии изготавливается три вида изделий , на производство каждого из них расходуется четыре вида сырья.

Расходы каждого вида сырья на производство одной единицы изделия каждого вида удобно расположить в следующей таблице:

$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \end{pmatrix}$, где $a_{ik}$ - количество сырья $k$-го вида ($k$=1,2,3,4), расходуемого на изготовление одной единицы изделия $i$-го вида ($i$=1,2,3).

Полученную прямоугольную таблицу принято называть *матрицей* размера 3х4**,** а числа $a_{ik}$ - *элементами матрицы***.**

**Определение1.** Матрицей размера mxn называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов.

Матрица обозначается следующими способами:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\dots\dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\dots\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{Vmatrix} a_{11}\dots\dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\dots\dots\dots a_{mn} \end{Vmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11}\dots\dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\dots\dots\dots a_{mn} \end{bmatrix}, \|a_{ik}\| \text{ или } (a_{ik}), \text{ где}$$

$a_{ik}$ - элементы матрицы. Положение элемента в таблице характеризуется двойным индексом; первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

**Замечание**. Элементами матрицы, как правило, являются числа, но иногда и другие математические объекты, например, векторы, многочлены, дифференциалы и даже матрицы.

**Определение 2.** Матрица размера nxn называется *квадратной матрицей порядка n.*

Квадратная матрица $\|a_{ik}\|$ порядка n называется *верхней треугольной матрицей*, если $a_{ik}=0$ для всех $i\rangle k$; *нижней треугольной матрицей* , если $a_{ik}=0$ для всех $i\langle k$ ; *диагональной матрицей*, если $a_{ik}=0$ для всех $i\neq k$; *единичной матрицей*, если $a_{ik}=\delta_{ik}=\begin{cases}0, i\neq k\\ 1, i=k\end{cases}$.

Матрица размером 1xn, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*; аналогично матрица размера mx1 называется *матрицей-столбцом*. Матрица, у которой все элементы – нули – *нулевая матрица.*

**Определение 3.** Квадратная матрица называется *невырожденной* (*неособенной),* если ее определитель отличен от нуля.

**Определение 4.** Матрица $A^T$ называется *транспонированной матрицей по отношению к матрице A,* если столбцы A являются строками матрицы $A^T$, занумерованными в том же порядке,

Для матрицы 3x4 в общем виде имеем:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix} a_{11}a_{21}a_{31}a_{41} \\ a_{12}a_{22}a_{32}a_{42} \\ a_{13}a_{23}a_{33}a_{43} \end{pmatrix}$$

**Пример 1.**

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

**Определение 5.** Матрицы одного и того же размера называются *равными*, если их соответствующие элементы равны.

Пример2.

$$A=\begin{pmatrix} 15 \\ 43 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 15 \\ 43 \end{pmatrix}, A=B$$

**2. Действия над матрицами.**

а) Сложение матриц.

*Алгебраической суммой(разностью) матриц* A=($a_{ij}$) и B=($в_{ij}$) одинаковой размерности называется матрица C=($c_{ij}$) той же размерности, каждый элемент которой равен алгебраической сумме соответствующих матриц A и B.

Пример 3.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \text{ то } A\pm B=\begin{pmatrix} 1\pm 2 & 3\pm 6 \\ 4\pm 4 & 2\pm 9 \end{pmatrix}.$$

б) Умножение матрицы на число.

*Произведением матрицы А=($a_{ij}$) на число $\lambda$* называется такая матрица В=($в_{ij}$), элементы которой получены умножением всех элементов матрицы А на число $\lambda$.

$$в_{ij}=\lambda a_{ij}$$

Если $A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{pmatrix}$, то $B=\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11}\lambda a_{12}\lambda a_{13} \\ \lambda a_{21}\lambda a_{22}\lambda a_{23} \end{pmatrix}$

Пример 4.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, то $B=3A=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 3 \end{pmatrix}$.

**Замечание. Обратите внимание!!!**

Между умножением матрицы на число и умножением определителя на число имеется существенная разница. Если при умножении определителя на число нужно умножить на это число элементы лишь одного ряда (строки или столбца ), то при умножении матрицы на число нужно умножить все элементы матрицы.

в) Умножение матриц.

Умножение матриц осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, размерности матриц – сомножителей должны быть согласованы: число столбцов первого сомножителя должно быть равно числу строк второго.

*Произведением матрицы А=($a_{ij}$) размерности mxк на матрицу В=($в_{ij}$)* размерности *кхn* называется матрица *С=($c_{ij}$)*, каждый элемент которой равен сумме парных произведений элементов $i^{ой}$ строки матрицы А на соответствующие элементы j-*го* столбца матрицы В.

Схема получения произведения матриц.

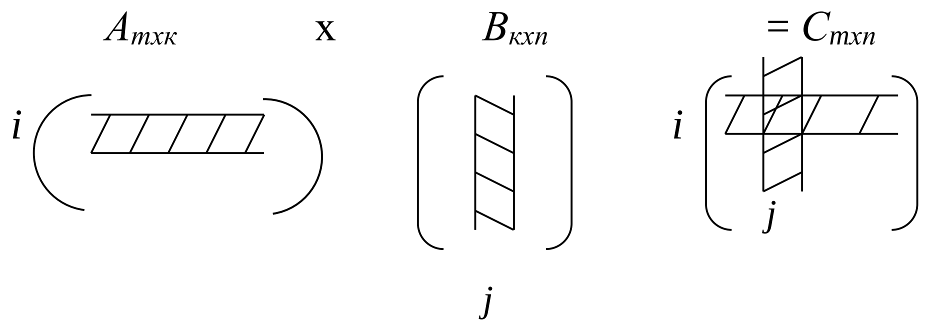
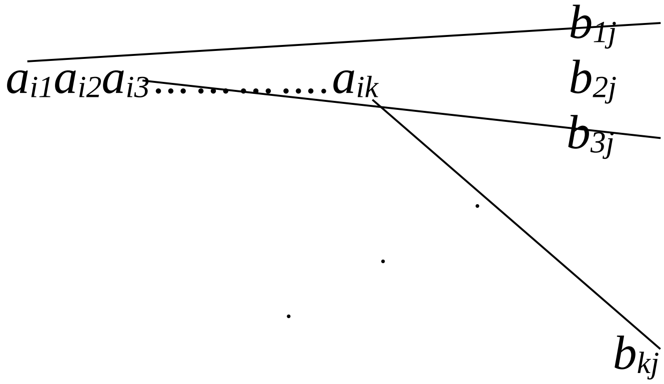



Схема получения элемента $C_{ij}$ произведения матриц.




*i*- строка матрицы А, *j* – столбец матрицы В.

Следует твердо запомнить, что для получения элементов произведения матриц берется строка первого множителя и столбец второго множителя.

$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots\ldots+a_{ik}b_{kj}$

Пример5.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\\ 7 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 6\end{pmatrix},\text{ то}$$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\\ 7 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1 + 2\cdot5 & 1\cdot(-3) + 2\cdot6\\ 0\cdot1 + 4\cdot5 & 0\cdot(-3) + 4\cdot6\\ 7\cdot1 + 3\cdot5 & 7\cdot(-3) + 3\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 9\\ 20 & 24\\ 22 & -3\end{pmatrix}$$

1. Найти произведение матриц A = $\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц A=$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$

3. Вычислить определитель матрицы A = $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$

4. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Найти det (AB).

5. .Даны матрицы A = $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, найти 2A + B,A•B

6. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^TB+\alpha C$.

7. Найти произведение матриц A = $\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

8. Найти произведение матриц A=$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$

9. Даны матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; В = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, показать, что $(AB)^T = B^T A^T$