Занятие № 3-4

1) Решить систему матричным способом: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$.

Решение. Пусть $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Тогда данную систему можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$. Решаем его, домножая слева на обратную матрицу: $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B$. Отсюда получаем решение $X = A^{-1}B$. Найдем сначала A^{-1}.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)(0-(-2)) = -6.$$

($\Delta_A \neq 0$, значит $A^{-1}\ \exists$).

$$A_{11} = \underset{(+)}{(-1)^{1+1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$A_{21} = \underset{(-)}{(-1)^{2+1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-(-2)) = -2$$

$$A_{31} = \underset{(+)}{(-1)^{3+1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$A_{12} = \underset{(-)}{\left(-1\right)^{2+2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\left(0 - \left(-1\right)\right) = -1,$$

$$A_{22} = \underset{(+)}{\left(-1\right)^{1+2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$A_{32}=\underset{(-)}{(-1)^{3+2}}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-1-2)=3, \qquad A_{13}=\underset{(+)}{(-1)^{1+3}}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4-1=-5,$$

$$A_{23}=\underset{(-)}{(-1)^{2+3}}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-(-2+1)=1 \qquad A_{33}=\underset{(+)}{(-1)^{3+3}}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1+2=3$$

Составляем обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -1 & -1 & 3\\ -5 & 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

Найдем

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\cdot 2+2\cdot 1+0\cdot(+3)\\ 1\cdot 2+1\cdot 1+(-3)(-3)\\ 5\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-3)(-3)\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6\\ 12\\ 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},$$

т. е. $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

Проверка. Подставим найденное решение в исходную систему: $1-2+3=2$ (истина), $2\cdot 1+2-3=1$ (истина), $1-2\cdot 2=-3$ (истина).

Ответ: $\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}$.

2) Решить систему методом Крамера.

Возьмем эту же систему и решим её с помощью определителей.

$\begin{cases}x-y+z=2\\ 2x+y-z=1\\ x-2y=-3\end{cases}$, запишем определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=-6$ (найден выше).

Заменим в Δ столбец коэффициентов при x на столбец правых частей

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-)(0+2) = -6 .$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при y на столбец правых частей

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1\underset{(+)}{(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9-3 = -12$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при z на столбец правых частей

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \; (-2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (-1)\,\underset{(-)}{(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -21+3 = -18 .$$

По формулам Крамера получаем решение $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-6}{-6} = 1 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-12}{-6} = 2 \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-18}{-6} = 3 \end{cases}.$

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}.$

3) Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

Выписываем расширенную матрицу $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$ и с помощью элементарных преобразований приводим ее или к треугольному виду, или к виду трапеции (как получится).

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & -3\end{array}\right)\begin{matrix}(-2) & (-1)\\ & \\ & \end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & -1 & -1 & -5\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 3 & -3 & -3\end{array}\right)\begin{matrix} \\ (3)\\ \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -6 & -18\end{array}\right)\begin{matrix} \\ :(-1)\\ :(-6)\end{matrix}\quad\Rightarrow\begin{array}{c}\begin{matrix}x & y & z & \end{matrix}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)\end{array}.\ \ rA=3,\ rB=3\ \Rightarrow\ r=3.$$

Так как число неизвестных $n=3$ и равно рангу системы, система имеет единственное решение. По полученной матрице восстанавливаем систему уравнений. Идя снизу вверх, получаем это решение: $\begin{cases}x-y+z=2\\ y+z=5\\ z=3\end{cases}$.

Из последнего уравнения $z=3$, с помощью второго находим $y=5-z=5-3=2$. Подставляя в первое уравнение найденные $y=2$ и $z=3$, находим $x=2+y-z=2+2-3=4-3=1$.

Ответ: $\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}$.

б) $\begin{cases}x-y+z=2\\ 2x+y-z=1\\ x+2y-2z=1\end{cases}$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}(-2) & (-1)\\ & \\ & \end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 3 & -3 & -1\end{array}\right)\begin{matrix} \\ (-1)\\ \end{matrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$rA = 2,\ rB = 3$. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система несовместна (т. е. не имеет решения). Выпишем уравнение, соответствующее последней строке полученной матрицы: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2$, что невозможно.

Ответ: система не имеет решения.

в) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -1 \\ -2x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

Записываем расширенную матрицу:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) (2)\quad (-3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) :\ (\text{-}1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$rA = rB = 2$. Отсюда следует, что система совместна.

Число неизвестных $n = 3 > r = 2$. Следовательно, система имеет бесконечное множество решений: $n - r = 3 - 2 = 1$. Отсюда система имеет одну свободную переменную, пусть это будет z, тогда $x,\ y$ – базисные (базисных неизвестных столько, каков ранг системы, т. е. сколько ненулевых строк остается в последней матрице).

Запишем систему, соответствующую полученной матрице: $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ y + 4z = -4 \\ z = z \end{cases}$.

Следовательно, идя снизу вверх, выражаем базисные неизвестные через свободную z. Из второго уравнения выражаем $y = -4 - 4z$, из первого уравнения

$$x = y + z + 1 = (-4 - 4z) + z + 1 = -4 - 4z + z + 1 = -3 - 3z.$$

Общее решение: $\begin{cases} x = -3 - 3z \\ y = -4 - 4z \\ z = z \end{cases}$.

Из общего решения можно получить любое частное решение. Пусть $z=-2$, тогда получим частное решение: $x=-3-3(-2)=-3+6=3;\quad y=-4-4(-2)=-4+8=4.$

Частное решение: $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=-2 \end{cases}$.

Выполним проверку общего решения. Для этого подставим найденные выражения x, y, z в уравнения исходной системы:

1) $3(-3-3z)-2(-4-4z)+z=-1$

$-\underline{9}-\underline{\underline{9z}}+\underline{8}+\underline{\underline{8z}}+\underline{\underline{z}}=-1 \qquad -1=-1$ (истина)

2) $-2(-3-3z)+(-4-4z)-2z=2$

$\underline{6}+\underline{\underline{6z}}-\underline{4}-\underline{\underline{4z}}-\underline{\underline{2z}}=2 \qquad 2=2$ (истина)

3) $(-3-3z)-(-4-4z)-z=1$

$\underline{-3}-\underline{\underline{3z}}+\underline{4}+\underline{\underline{4z}}-\underline{\underline{z}}=1 \qquad 1=1$ (истина)

Ответ: $\begin{cases} x=-3-3z \\ y=-4-4z \\ z=z \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

1.	а) $\begin{cases} x-2y-z=-5 \\ x+2y-2z=2 \\ 3x+y-4z=-2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ 3x+y+4z=0 \end{cases}$.

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

1.	а) $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x+y+z=1 \\ x+y=2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ -x+4y+z=3 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$;

Задание 3. Решить системы однородных уравнений:

1. а) $\begin{cases} 3x+4y+2z=0 \\ x-y+4z=0 \\ 5x+2y+10z=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \\ 2x+5y+3z=0 \\ 4x+3y=0 \end{cases}$.