«Векторная алгебра»

Если известны координаты точек $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$, то координаты вектора $\vec a=\overrightarrow{AB}\{b_1-a_1;\ \ b_2-a_2;\ \ b_3-a_3\}=\vec a\{x;\ y;\ z\}$.

Разложение этого вектора по ортам $\vec i,\ \vec j,\ \vec k$: $\vec a=x\cdot\vec i+y\cdot\vec j+z\cdot\vec k.$

Длина вектора находится по формуле $|\vec a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а направляющие косинусы равны $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\vec a|}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{|\vec a|}$, $\cos\gamma=\dfrac{z}{|\vec a|}$. Орт вектора $\vec a^{o}=\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$.

Пример 1. Даны точки $A(1;\ 7;\ 0)$, $B(5;\ 7;\ 3)$, $C(7;\ 6;\ 5)$.

Разложить вектор $\vec a=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec i,\ \vec j,\ \vec k$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec a$. Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{AC}\{7-1;\ 6-7;\ \ 5-0\}=\overrightarrow{AC}\{6;-1;\ 5\}$ и $\overrightarrow{BC}\{7-5;\ \ 6-7;\ \ 5-3\}=\overrightarrow{BC}\{2;\ -1;\ 2\}$.

Вектор $\vec a=\overrightarrow{AC}-\ -\overrightarrow{BC}=\vec a\{6-2;\ -1-(-1);\ 5-2\}=\vec a\{4;0;3\}$, $|\vec a|=\sqrt{4^2+0+3^2}=\sqrt{25}=5$,

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=\dfrac{3}{5}$, $\vec a^{0}\left\{\dfrac{4}{5};0;\dfrac{3}{5}\right\}$.

Контрольные варианты к задаче 1. Даны точки A, B и C. Разложить вектор $\vec a$ по ортам $\vec i,\ \vec j,\ \vec k$. Найти длину, направляющие косинусы и орт вектора $\vec a$.

1. $A(1;2;-1)$, $B(1;3;4)$, $C(0;1;5)$, $\vec a=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

2. $A(1;2;-1)$, $B(1;3;4)$, $C(0;1;5)$, $\vec a=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.

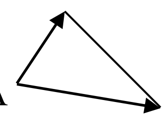
Задача 2. Если даны векторы $\vec a\{a_1;a_2;a_3\}$ и $\vec b\{b_1;b_2;b_3\}$, то $\vec a\cdot\vec b=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$.

Тогда $\cos\widehat{\vec a,\vec b}=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|\cdot|\vec b|}$; проекция вектора $\vec b$ на направление вектора $\vec a$ $\text{пр}_{\vec a}\vec b=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|}$, условие перпендикулярности ненулевых векторов выглядит следующим образом: $\vec a\cdot\vec b=0$.

Условие коллинеарности векторов: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

Пример 2. Даны вершины треугольника $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(5;\ 4;\ 1)$, $C(6;\ 13;\ 1)$. Найти угол при вершине A и проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на сторону AC.

Внутренний угол при вершине A образован векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$,



$\overrightarrow{AB}\{5-1;\ 4-1;\ 1-1\}=\overrightarrow{AB}\{4,\ 3,\ 0\}$, $\overrightarrow{AC}\ \{5;\ 12;\ 0\}$.

Тогда $\cos\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$. $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot 5 + 3\cdot 12 + 0 = 56,\ \overrightarrow{AB} = = \sqrt{4^2+3^2} = 5,$

$\overrightarrow{AC} = \sqrt{5^2+12^2} = 13.\quad \cos\angle A = \dfrac{56}{5\cdot 13} = \dfrac{56}{65}.$

Проекция $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора $\overrightarrow{AC}$: $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{56}{13}.$

Контрольные варианты к задаче 2

1. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}\vec{b}$.
2. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{b} = 10\vec{i} - 2\sqrt{2}\cdot\vec{j} - 6\vec{k}$ и осью OZ.

Задача 3. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно найти по формуле $S_n = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, а площадь треугольника, построенного на этих векторах: $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Пример 3. Даны вершины треугольника $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$. Найти его площадь и длину высоты, опущенной из вершины С.

$S_\Delta = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Находим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\{3-1;\ 0-2;\ -3-0\} = \overrightarrow{AB}\{2,-2,-3\},\quad \overrightarrow{AC}\{5-1;\ 2-2;\ 6-0\} = \overrightarrow{AC}\{4,0,6\}.$

Векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} +$

$$+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(-12+0) - \vec{j}\cdot(12+12) + +\vec{k}\cdot(0+8) = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} =$$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28,\quad S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 28 = 14.$$

Так как $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot h$, где $h -$ длина высоты, опущенной из вершины С на сторону АВ, $h = \dfrac{2\cdot S_\Delta}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17},\quad h = \dfrac{2\cdot 14}{\sqrt{17}} = \dfrac{28\cdot\sqrt{17}}{17}.$

Контрольные варианты к задаче 3

1. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\overrightarrow{AD}\{2;\ 1;\ -2\}$. Найти площадь параллелограмма, построенного на диагоналях параллелограмма ABCD.

2. Даны три вершины параллелограмма $A(3;\ -2;\ 4)$, $B(4;\ 0;\ 3)$, $C(7;\ 1;\ 5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C (через площадь параллелограмма).

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1;\ 3;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ 6)$, $C(2;\ 5;\ 1)$ (средствами векторной алгебры).

Задача 4. Если даны координаты $\bar{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\bar{b}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $\bar{c}(x_3,\ y_3,\ z_3)$, то смешанное произведение векторов вычисляют по формуле

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объемы параллелепипеда и тетраэдра (треугольной пирамиды), построенных на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ находятся с помощью смешанного произведения векторов:

$$V_{пар} = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|, \quad V_{тет} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\overleftarrow{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

Если $\vec{a}\times\overleftarrow{b}\cdot\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a},\ \overleftarrow{b},\ \vec{c}$ - правая.

Если $\vec{a}\times\overleftarrow{b}\cdot\vec{c} < 0$, то тройка левая.

Если $\vec{a}\times\overleftarrow{b}\cdot\vec{c} = 0$, то векторы $\vec{a},\ \overleftarrow{b},\ \vec{c}$ компланарны.

Пример 4. Дан параллелепипед $ABCD\,A'B'C'D'$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}\{4;\ 3;\ 0\}$, $\overrightarrow{AD}(2;\ 1;\ 2\}$ и $\overrightarrow{AA'}\{-3;\ -2;\ 5\}$. Найти высоту, проведенную из вершины A' на грань ABCD.

Объем $V_{пар}$ равен произведению площади основания на высоту:

$$V_{пар} = S\cdot h = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|\cdot h.$$

$V_{пар}$ находится также по формуле $V_{пар} = \left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}\right|$, поэтому

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|}.$$

Вычислим векторное произведение $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k} = \{6; -8; -2\}.$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{26}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -12, \quad \left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA} \right| = |-12| = 12.$$

Тогда $h = \dfrac{12}{2\sqrt{26}} = \dfrac{12 \cdot \sqrt{26}}{2 \cdot 26} = \dfrac{3\sqrt{26}}{13}.$

Контрольные варианты к задаче 4

1. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AB}\{1;\ 3;\ 1\}$, $\overrightarrow{AC}\{0;\ 1;\ -1\}$ и $\overrightarrow{AD} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(-1;\ 4;\ 1)$, $B(0; 7; 1)$, $C(1;\ 3;\ 5)$, $D(0;\ 6;\ -1)$.

$\wedge$