Занятие №6

«АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ»

Задача 1. Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

где A, B – координаты нормального (перпендикулярного) вектора прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0,\ y_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}\ =\ \{A;B\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0)\ =\ 0. \qquad (2)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0,\ y_0)$, параллельно вектору $\vec{S} = \{m;\ n\}$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (3)$$

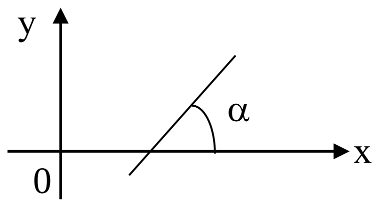
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M(x_1,\ y_1)$ и $M(x_2,\ y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (4)$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0,\ y_0)$ в данной направлении, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (5)$$

где $k\ =\ tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой, α - угол, образованный прямой с положительным направлением на оси ОХ.



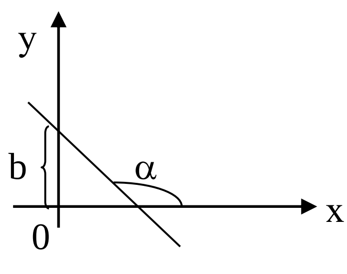
Если прямая проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид

$$y\ =\ kx. \qquad (6)$$

Уравнение

$$y = kx + b \qquad (7)$$

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом, где b – величина отрезка, отсекаемого прямой от оси ОУ.



Пусть две прямые заданы общими уравнениями

$$\ell_1: A_1x + B_1y = C_1 \quad \text{и} \quad \ell_2: A_2x + B_2y = C_2.$$

Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

Если $\ell_1, \ell_2 = \delta$, то $\cos\delta = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$\ell_1: y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad \ell_2: y = k_2x + b_2.$$

Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $k_1 = k_2$.

Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Если $\ell_1, \ell_2 = \delta$, то $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

Расстояние d от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{8}$$

Пример 1

Даны координаты вершин треугольника $A(2, 5)$, $B(5, 1)$, $C(11, 3)$.

1) Вычислить длину стороны BC.

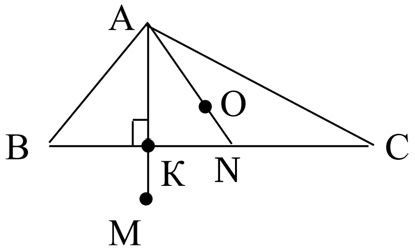
2) Составить уравнение линии BC.

3) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину.

4) Найти точку пересечения медиан.

5) Найти косинус внутреннего угла при вершине B.

6) Найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A, относительно прямой BC.



Решение

1. Длина стороны BC равна модулю вектора $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC} = \{11 - 5; 3 - 1\}$, $\overrightarrow{BC} = \{6; 2\}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$.

2. Уравнение прямой ВС: $\dfrac{x-x_в}{x_c-x_в}=\dfrac{y-y_в}{y_c-y_в}$; $\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{y-1}{2}$; $x-3y-2=0$.

3. Уравнение высоты АК запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}=\{6;\,2\}$: $6(x-2)+2(y-5)=0$; $3x+y-11=0$. Длину высоты АК можно найти как расстояние от точки А до прямой ВС: $|AK|=d=\dfrac{|1\cdot 2-3\cdot 5-2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

4. Найдем координаты точки N – середины стороны ВС:

$$x_N=\frac{x_в+x_c}{2}=\frac{5+11}{2}=8;\ y_N=\frac{y_в+y_c}{2}=\frac{1+3}{2}=2;\ \ N(8,2).$$

Точка пересечения медиан O делит каждую медиану на отрезки в отношении $\lambda=2:1$.

Используем формулы деления отрезка в данном отношении λ:

$$x_0=\frac{x_A+\lambda x_N}{1+\lambda};\ y_0=\frac{y_A+\lambda y_N}{1+\lambda};$$

$$x_0=\frac{2+2\cdot 8}{3}=6;\ y_0=\frac{5+2\cdot 2}{3}=\frac{9}{3}=3;\ O(6,\ 3).$$

5. Косинус угла при вершине В найдем как косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ $\{2-5;\ 5-1\}=\overrightarrow{BA}\{-3,4\}$; $\overrightarrow{BC}\{6;\ 2\}$,

$$\cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{-3\cdot 6+4\cdot 2}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot 2\sqrt{10}}=\frac{-10}{10\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

6. Точка М, симметричная точке А относительно прямой ВС, расположена на прямой АК, перпендикулярной к прямой ВС, на таком же расстоянии от прямой, как и точка А. Координаты точки К найдем как решения системы $\begin{cases}x-3y-2=0,\\ 3x+y-11=0.\end{cases}$

Систему решим по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=10;\ \Delta_1=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 11 & 1\end{vmatrix}=35;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 11\end{vmatrix}=5;\ x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{35}{10}=\frac{7}{2};\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2};\ K\left(\frac{7}{2};\ \frac{1}{2}\right).$$

Точка К является серединой отрезка АМ.

$$x_K=\frac{x_A+x_M}{2};\ \frac{7}{2}=\frac{2+x_M}{2};\ x_M=5;\ y_K=\frac{y_A+y_M}{2};\ \frac{1}{2}=\frac{5+y_M}{2};\ y_M=-4;$$

$M(5,-4)$.

Контрольные варианты к задаче 1

Даны координаты вершин треугольника АВС. Требуется:

1) вычислить длину стороны ВС;

2) составить уравнение линии BC;

3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины A;

4) вычислить длину высоты, проведенной из вершины A;

5) найти точку пересечения медиан;

6) вычислить внутренний угол при вершине B;

7) найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A относительно прямой BC.

«АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Задача 1

Общее уравнение плоскости имеет вид: $Ax+Bx+Cz+D=0$, где $\vec{n}=\{A;B\,C\}$ - ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости (нормальный вектор плоскости).

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $[\ M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)\ ]$ определяется равенством

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+Bx+Cz+D=0$ находится по формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Пример 1

Найти расстояние от точки $M_0(1,-2,3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3,\ -1,\ 2), M_2(4,\ -1,\ -1), M_3(2,\ 0,\ 2)$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разложив его по первой строке:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} -(y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} +(z-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$3(x-3)+3(y+1)+(z-2)=0;\quad 3x+3y+z-9+3-2=0;\ 3x+3y+z-8=0.$

Найдем расстояние от точки M_0 до плоскости $3x+3y+z-8=0$.

$$d=\frac{|3\cdot 1-3\cdot 2+3-8|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{19}}=\frac{8\sqrt{19}}{19}.$$

Контрольные варианты к задаче 1

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки
M_1, M_2 и M_3:

1. $M_1(-3,\ 4,\ -7)$, $M_2(1,\ 5,\ -4)$, $M_3(-5,\ -2,\ 0)$, $M_0(-12,\ 7,\ -1)$.

З а д а ч а 2

Косинус угла φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}|\cdot|\overrightarrow{N_2}|}\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Пример 2

Найти угол между плоскостями $x+y-1=0$ и $2x-y+\sqrt{3}z+1=0$. Найдем косинус искомого угла:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+1(-1)+0\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}=\frac{1}{4},\ \varphi=\arccos\frac{1}{4}.$$

Контрольные варианты к задаче 2

Найти угол между плоскостями:

1. $x-3y+5=0,\ \ 2x-y+5z-16=0$.

З а д а ч а 3

Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (9)$$

где $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ - точка, лежащая на прямой, а $\vec{S}=\{m;\ n;\ p\}$ - направляющий вектор прямой (ненулевой вектор, параллельный прямой).

Чтобы перейти от общих уравнений прямой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (10)$$

к ее каноническим уравнениям, нужно на прямой найти какую-нибудь точку M_0 и определить направляющий вектор прямой $\vec{S}$. Точку M_0 можно найти так: задаем произвольно значение одной переменной, например, $z = z_0$, и из общих уравнений прямой (10) найдем значения x_0 и y_0. Направляющий вектор $\vec{S}$ параллелен
линии пересечения плоскостей (10) и, следовательно, перпендикулярен векторам $\vec{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$. Поэтому в качестве $\vec{S}$ можно взять вектор

$$\vec{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 3

Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$

Найдем точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, лежащую на прямой. Пусть $z_0 = 0$.

Тогда $\begin{cases} x_0-2y_0=4, \\ 3x_0+2y_0=4. \end{cases}$

Решив систему, найдем $x_0 = 2$ и $y_0 = -1$. Таким образом, $M_0(2, -1, 0)$. Найдем направляющий вектор прямой

$$\bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 14\bar{j} + 8\bar{k}.$$

Запишем канонические уравнения: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{14} = \dfrac{z}{8}$ или $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z}{4}$.

Контрольные варианты к задаче 3

Написать канонические уравнения прямой:

1. $\begin{cases} 2x-y-3z+1=0, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

З а д а ч а 4

Точка пересечения P прямой и плоскости находится следующим образом: уравнения прямой приводят к параметрическому виду $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$, затем подставляют в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и определяют значение параметра t, соответствующее точке пересечения. Если при такой подстановке уравнение плоскости выполняется при любом t, то прямая лежит в плоскости, а если не выполняется ни при каком t, то прямая параллельна плоскости. Найденное значение t подставляют в параметрические уравнения прямой.

Пример 4

Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Приведем уравнения прямой к параметрическому виду:
$\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1} = t$; $\dfrac{x-12}{4} = t \Rightarrow x = 12 + 4t$; $\dfrac{y-9}{3} = t \Rightarrow y = 9 + 3t$;
$\dfrac{z-1}{1} = t \Rightarrow z = 1 + t$, т. е. параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Подставив x, y, z в уравнение плоскости, найдем t:
$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0; \quad t = -3.$
Искомая точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты
$x_0 = 12 + 4(-3) = 0;\ \ y_0 = 9 + 3(-3) = 0;\ \ z_0 = 1 - 3 = -2$, т. е. $P(0,\ 0,\ -2)$.

Контрольные варианты к задаче 4

Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1. $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{4}$ и $x + 2y + 3z - 14 = 0$.