

#### 4. Обратная матрица.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

**Определение.** Если существуют квадратные матрицы  $X$  и  $A$ , удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где  $E$  - единичная матрица того же самого порядка, то матрица  $X$  называется **обратной** к матрице  $A$  и обозначается  $A^{-1}$ .

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, \quad i=(1,n), j=(1,n),$$

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \quad i = j.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \dots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \dots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \dots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \dots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \dots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы  $X$ .

Пример. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , найти  $A^{-1}$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где  $M_{ji}$ - дополнительный минор элемента  $a_{ji}$  матрицы  $A$ .

Пример. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , найти  $A^{-1}$ .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$\begin{array}{cccc} M_{11}=4; & M_{12}=3; & M_{21}=2; & M_{22}=1 \\ x_{11}=-2; & x_{12}=1; & x_{21}=3/2; & x_{22}=-1/2 \end{array}$$

Таким образом,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

Свойства обратных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

$$1) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$2) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$3) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Пример. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ , найти  $A^3$ .

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$  являются перестановочными.

## 5. Ранг матрицы.

Как было сказано выше, минором матрицы порядка  $s$  называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких-либо выбранных  $s$  строк и  $s$  столбцов.

**Определение.** В матрице порядка  $m \times n$  минор порядка  $r$  называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка  $r+1$  и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е.  $r$  совпадает с меньшим из чисел  $m$  или  $n$ .

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными**.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

**Определение.** Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается  $Rg A$ .

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

**Определение.** Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными**.

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эквивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

**Теорема.** *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}A = 2.$$

Пример: Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удастся найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

**Теорема.** *В произвольной матрице A каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*

*Таким образом, ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.*

Если A- квадратная матрица и  $\det A = 0$ , то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе