Аналитическая геометрия в пространстве
Уравнение плоскости.

1. Общее уравнение плоскости.

Определение. Любое уравнение, связывающее координаты x, y, z любой точки поверхности является уравнением этой поверхности.

Определение. Плоскостью называется поверхность, вес точки которой удовлетворяют общему уравнению:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0},$$

где A, B, C – координаты вектора $\overrightarrow{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ -вектор **нормали** к плоскости.

Возможны следующие частные случаи:

A = 0 – плоскость параллельна оси Ox
B = 0 – плоскость параллельна оси Oy
C = 0 – плоскость параллельна оси Oz
D = 0 – плоскость проходит через начало координат
A = B = 0 – плоскость параллельна плоскости xOy
A = C = 0 – плоскость параллельна плоскости xOz
B = C = 0 – плоскость параллельна плоскости yOz
A = D = 0 – плоскость проходит через ось Ox
B = D = 0 – плоскость проходит через ось Oy
C = D = 0 – плоскость проходит через ось Oz
A = B = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOy
A = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOz
B = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью yOz

2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Для того, чтобы через три какие- либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка M(x, y, z) лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

3. Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости.

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 и произвольную точку $M(x, y, z)$ параллельно вектору $\vec{a}$.

Векторы $\begin{matrix} \overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \end{matrix}$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть компланарны, т.е.

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$$

Уравнение плоскости:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0}$$

4. Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам, коллинеарным плоскости.

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, коллинеарные плоскости. Тогда для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MM_1}$ должны быть компланарны.

Уравнение плоскости:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0}$$

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали.

Теорема. *Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{N}$ (A, B, C) имеет вид:*

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

Доказательство. Для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Т.к. вектор $\vec{N}$ - вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а, следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тогда скалярное произведение

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$$

Таким образом, получаем уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Теорема доказана.

5. Уравнение плоскости в отрезках.

Если в общем уравнении Ах + Ву + Cz + D = 0 поделить обе части на -D

$$-\frac{A}{D}x-\frac{B}{D}y-\frac{C}{D}z-1=0,$$

заменив $-\frac{D}{A}=a,\quad -\frac{D}{B}=b,\quad -\frac{D}{C}=c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями х, у, z.

6. Уравнение плоскости в векторной форме.

$$\boxed{\vec{r}\cdot\vec{n}=p},\text{ где}$$

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ - радиус- вектор текущей точки М(х, у, z),

$\vec{n}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma$ - единичный вектор, имеющий направление, перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат.

α, β и γ - углы, образованные этим вектором с осями х, у, z.

p – длина этого перпендикуляра.

В координатах это уравнение имеет вид:

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.}$$

Расстояние от точки до плоскости.

7. Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости Ax+By+Cz+D=0

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка Р(4; -3; 12) – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

$$\overrightarrow{OP}=(4;-3;12);\qquad \left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{16+9+144}=\sqrt{169}=13$$

$$\vec{N}=\left(\frac{4}{13};-\frac{3}{13};\frac{12}{13}\right)$$

Таким образом, A = 4/13; B = -3/13; C = 12/13, воспользуемся формулой:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

$$\frac{4}{13}(x-4)-\frac{3}{13}(y+3)+\frac{12}{13}(z-12)=0$$

$$\frac{4}{13}x-\frac{16}{13}-\frac{3}{13}y-\frac{9}{13}+\frac{12}{13}z-\frac{144}{13}=0$$
$$\frac{4}{13}x-\frac{3}{13}y+\frac{12}{13}z-\frac{169}{13}=0$$
$$4x-3y+12z-169=0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки P(2; 0; -1) и Q(1; -1; 3) перпендикулярно плоскости 3x + 2y – z + 5 = 0.

Вектор нормали к плоскости 3x + 2y – z + 5 = 0 $\overrightarrow{N}=(3;2;-1)$ параллелен искомой плоскости.

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-2)(1-8)-y(1-12)+(z+1)(-2+3)=0$$
$$-7(x-2)+11y+(z+1)=0$$
$$-7x+14+11y+z+1=0$$
$$-7x+11y+z+15=0$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки A(2, -1, 4) и B(3, 2, -1) перпендикулярно плоскости $x + y + 2z - 3 = 0$.

Искомое уравнение плоскости имеет вид: Ax + By + Cz + D = 0, вектор нормали к этой плоскости $\overrightarrow{n_1}$ (A, B, C). Вектор $\overrightarrow{AB}$ (1, 3, -5) принадлежит плоскости. Заданная нам плоскость, перпендикулярная искомой имеет вектор нормали $\overrightarrow{n_2}$ (1, 1, 2). Т.к. точки А и В принадлежат обеим плоскостям, а плоскости взаимно перпендикулярны, то

$$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=11\vec{i}-7\vec{j}-2\vec{k}.$$

Таким образом, вектор нормали $\overrightarrow{n_1}$ (11, -7, -2). Т.к. точка А принадлежит искомой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости, т.е. 11⋅2 + 7⋅1 - 2⋅4 + D = 0;   D = -21.

Итого, получаем уравнение плоскости: 11x - 7y – 2z – 21 = 0.

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка P(4, -3, 12) – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Находим координаты вектора нормали $\overrightarrow{OP}$ = (4, -3, 12). Искомое уравнение плоскости имеет вид: $4x - 3y + 12z + D = 0$. Для нахождения коэффициента D подставим в уравнение координаты точки P:

$$16 + 9 + 144 + D = 0$$
$$D = -169$$

Итого, получаем искомое уравнение: $4x - 3y + 12z - 169 = 0$

Пример. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1; 0; 3)$, $A_2(2; -1; 3)$, $A_3(2; 1; 1)$, $A_4(1; 2; 5)$.

1) Найти длину ребра A_1A_2.

$\overrightarrow{A_1A_2} = \{2-1; -1-0; 3-3\} = \{1; -1; 0\}$; $\quad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}(ед).$

2) Найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4.

$\overrightarrow{A_1A_4} = \{1-1; 2-0; 5-3\} = \{0; 2; 2\}$

$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = 2\sqrt{2}(ед)$

$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (1; -1; 0)(0; 2; 2) = -2$

$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|\cos\alpha = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\alpha = 4\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; \qquad \alpha = 120^0$$

3) Найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Сначала найдем вектор нормали к грани $A_1A_2A_3$ $\vec{N}$ как векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$.

$\overrightarrow{A_1A_3}$ = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}; \qquad \vec{N} = (-2; -2; -2)$$

$\left|\vec{N}\right| = 2\sqrt{3}$

Найдем угол между вектором нормали и вектором $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}\cos\beta$

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = -4 - 4 = -8.$

Искомый угол γ между вектором и плоскостью будет равен $\gamma = 90^0 - \beta$.

$$\sin\gamma = \cos\beta = \frac{|-8|}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \qquad \gamma = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$$

4) Найти площадь грани $A_1A_2A_3$.

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{N}\right|=\sqrt{3}(e\partial^2)$$

5) Найти объем пирамиды.

$$V=\frac{1}{6}\left|\ ((\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3})\cdot\overrightarrow{A_1A_4})\ \right|=\left|\ \frac{1}{6}\vec{N}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\ \right|=\frac{4}{3}\ (\text{ед}^3).$$

6) Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Воспользуемся формулой уравнения плоскости, проходящей через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(x-1)\cdot 2-y(-2)+(z-3)(1+1)=$$

$$=2x-2+2y+2z-6=0$$

$$2x + 2y + 2z – 8 = 0$$

$$x + y + z – 4 = 0;$$