Лекция 10. Основные понятия функции одного переменного
Элементы высшей алгебры.

1. Основные понятия теории множеств.

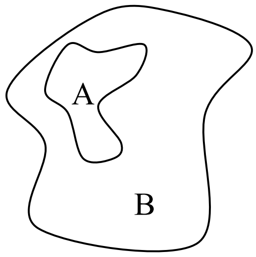
Определение. Множеством М называется объединение в единое целое определенных различимых объектов *а*, которые называются **элементами** множества.

$$a \in \text{М}$$

Множество можно описать, указав какое – нибудь свойство, присущее всем элементам этого множества.

Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обзначается $\varnothing$.

Определение. Если все элементы множества А являются также элементами множества В, то говорят, что множество А **включается (содержится)** в множестве В.



$A \subset B$

Определение. Если $A \subseteq B$, то множество А называется **подмножеством** множества В, а если при этом $A \neq B$, то множество А называется **собственным подмножеством** множества В и обозначается $A \subset B$.

Для трех множеств А, В, С справедливы следующие соотношения.

$$A \subseteq A; \quad A \not\subset A;$$
$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C;$$
$$A \subseteq B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C;$$

Связь между включением и равенством множеств устанавливается следующим соотношением:

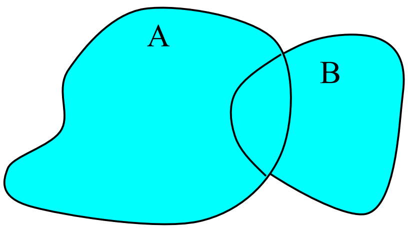
$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Здесь знак $\wedge$ обозначает **конъюнкцию** (логическое “и”).

2. Операции над множествами.

Определение. Объединением множеств А и В называется множество С, элементы которого принадлежат хотя бы одномк из множеств А и В.

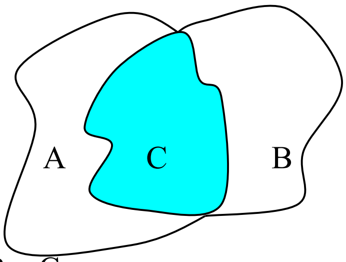
Обозначается $C = A \cup B$.



Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется **диаграммой Эйлера – Венна**.

Определение. Пересечением множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат каждому из множеств A и B.

Обозначение $C = A \cap B$.



Для множеств A, B и C справедливы следующие свойства:

$$A \cap A = A \cup A = A; \qquad A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A;$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

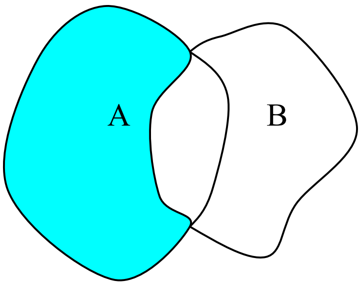
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (A \cap B) = A; \qquad A \cap (A \cup B) = A;$$

$$A \cup \varnothing = A; \qquad A \cap \varnothing = \varnothing;$$

Определение. Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

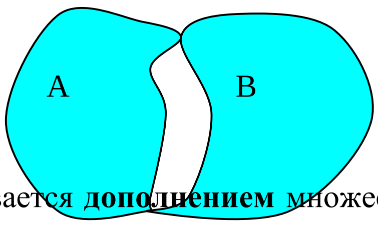
Обозначается $C = A \setminus B$.



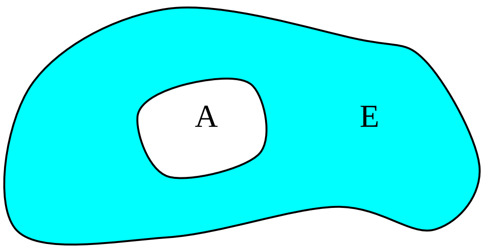
Определение. Симметрической разностью множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат в точности одному из множеств A или B.

Обозначается $A \Delta B$.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Определение. C_E называется **дополнением** множества A относительно множества E, если $A \subseteq E$ и $C_E = E \setminus A$.



Для множеств A, B и C справедливы следующие соотношения:

$$A \setminus B \subseteq A; \qquad A \setminus A = \varnothing; \qquad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B;$$

$$A \Delta B = B \Delta A; \qquad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C); \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C); \qquad (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$$

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C); \qquad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C); \qquad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C);$$

$$A \cup C_E A = E; \qquad A \cap C_E A = \varnothing; \qquad C_E E = \varnothing; \qquad C_E \varnothing = E; \qquad C_E C_E A = A;$$

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B; \qquad C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B;$$

Пример. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграммы Эйлера - Вейна.

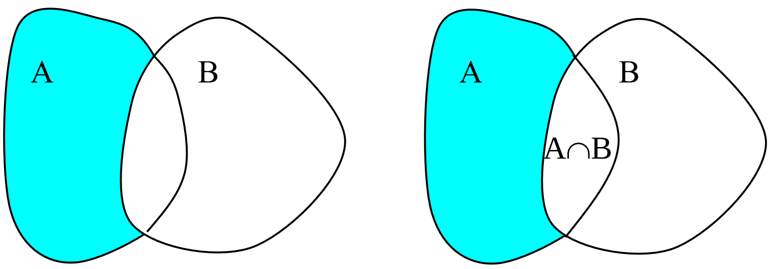
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

Из записанных выше соотношений видно, что

$$A \setminus (A \cap B) = (A \setminus A) \cup (A \setminus B) = \varnothing \cup (A \setminus B) = A \setminus B$$

Что и требовалось доказать.

Для иллюстрации полученного результата построим диаграммы Эйлера – Вейна



Пример. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество.

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Если некоторый элемент $x \in A \setminus (B \cup C)$, то это означает, что этот элемент принадлежит множеству A, но не принадлежит множествам B и C.

Множество A \ B представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Множество A \ C предсталяет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству C.

Множество (A \ B) ∩ (A \ C) представляет собой множество элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат ни множеству B, ни множеству C.

Таким образом, тождество можно считать доказанным.

3. Отношения и функции.

Определение. Упорядоченной парой (*a, b)* двух элементов *a* и *b* называется множество {{*a*},{a, b}}.

Для любых элементов *a, b, c, d* справедливо соотношение:

$$(a,b)=(c,d) \leftrightarrow a=c \wedge b=d;$$

Определение. Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (*a, b*), где $a \in A$, $b \in B$.

$$\boxed{A \times B = \{(a,b) | a \in A; \quad b \in B\}}$$

Декартово произведение *n* равных множеств A будет называться *n* – й **декартовой степенью** множества A и обозначаться A^n.

Определение. ***n*** **– мерным отношением** R на непустом множестве A называется подмножество A^n. Если R – n – мерное отношение на множестве A и $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in R$, то говорят, что отношение R выполняется для элементов $a_1, a_2, \ldots a_n$ и записывают R $a_1 a_2 \ldots a_n$. Если n = 2, то такое отношение называется **бинарным**.

Для бинарного отношения вместо общей записи Ra_1a_2 применяют запись a_1Ra_2.

Свойства бинарных отношений.

Определение. Произведением двух бинарных отношений R и S, заданных на множестве A, называется множество

$$\{(x,y) | \exists z (z \in A) \wedge (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S\}$$

Знак | называется **штрих Шеффера** и обозначает антиконъюнкцию.

Определение. Обратным (инверсным) отношением к отношению R, заданному на множестве A, называется отношение R^{-1}, определяемое равенством:

$$R^{-1} = \{(x,y) | (y,x) \in R\}$$

Если R, S и T – бинарные отношения на множестве A, то выполняются следующие равентсва:

$$(R \cdot S) \cdot T = R \cdot (S \cdot T); \qquad (R \cup S) \cdot T = (R \cdot T) \cup (S \cdot T);$$

$$(R \cap S) \cdot T = (R \cdot T) \cap (S \cdot T); \qquad (R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1};$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}; \qquad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1};$$

Алгебраические структуры.

Определение. На множестве А определена **алгебраическая операция,** если каждым двум элементам этого множества, взятым в определенном порядке, однозначным образом поставлен в соответствие некоторый третий элемент из этого же множества.

Примерами алгебраических операций могут служить такие операции как сложение и вычитание целых чисел, сложение и вычитание векторов, матриц, умножение квадратных матриц, векторное умножение векторов и др.

Отметим, что скалярное произведение векторов не может считаться алгебраической операцией, т.к. результатом скалярного произведения будет число, и числа не относятся к множеству векторов, к которому относятся сомножители.

Определение. Множество А с определенной на нем алгебраической операцией (например, умножением) называется **группой**, если выполнены следующие условия:

1) для любых трех элементов $a, b, c \in$ А выполняется свойство ассоциативности:

$$a(bc) = (ab)c$$

2) в множестве А существует такой элемент e, что для любого элемента a из этого множества выполняется равенство:

$$ae = ea = a$$

3) для любого элемента a множества существует элемент a' из этого же множества такой, что

$$aa' = a'a = e$$

Различные множества могут являться группой относительно какой- либо операции и не являться группой относительно другой операции.

Число элементов называется **порядком** группы.

Определение. Между элементами множеств M и N установлено **взаимно однозначное соответствие**, если каждому элементу множества M поставлен в соответствие определенный элемент множества N, причем различным элементам одного множества соответсвуют различные элементы другого множества.

Определение. Две группы M и N называются **изоморфными**, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответсвие, при котором для любых двух элементов $a, b \in M$ и соответствующим им элементам $a', b' \in N$ элементу
$c = ab$ будет соответствует элемент $c' = a'b'$.

При этом отображение группы M на группу N называется **гомоморфизмом**.

Определение. Если операция, определенная в группе коммутативна, (т.е. для любых элементов a и b группы верно соотношение $ab=ba$), то такая группа называется **коммутативной** или **абелевой** группой.

Определение. Множество R с двумя определенными в нем алгебраическими операциями, сложением и умножением, называется **кольцом**, если относительно операции сложения оно является абелевой группой, а операция умножения дистрибутивна, т.е. для любых элементов a, b и $c \in$ R справедливы равенства:

$$a(b+c) = ab + ac; \qquad (b+c)a = ba + ca;$$

Если операция умножения, определенная в кольце коммутативна, то такое кольцо называется **коммутативным** кольцом.

Определение. Полем называется коммутативное кольцо, в котором для любого ненулевого элемента $a \neq 0$ и любого элемента b существует единственный элемент x такой, что $ax = b$.