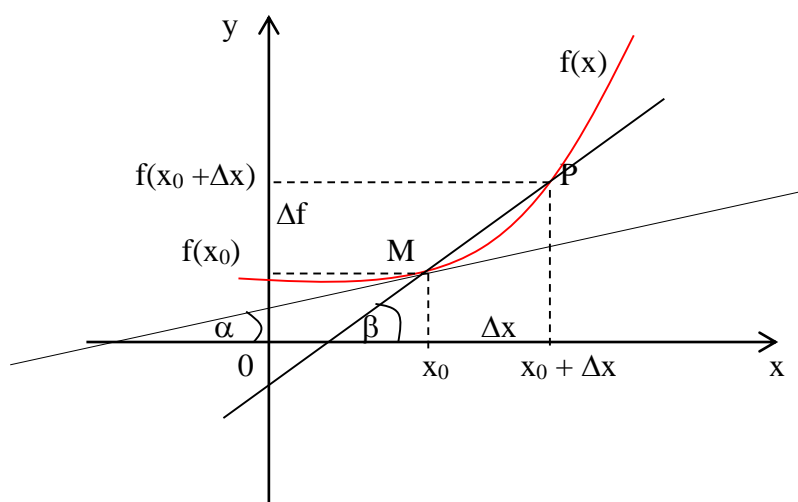


Лекция 13 Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

1. Определение производной.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b) . Тогда $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ — тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции $f(t)$, где t — время, а $f(t)$ — закон движения (изменения координат) — мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции — скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

2. Односторонние производные функции в точке.

Определение. Правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция $f(x)$ имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во-первых функция может иметь разрыв в точке x_0 , а во-вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0 , она может быть в ней не дифференцируема.

Например: $f(x) = |x|$ - имеет в точке $x = 0$ и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

3. Основные правила дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ - функции, дифференцируемые в точке x .

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2) (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ если } v \neq 0$$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

4. Производные основных элементарных функций.

$$1) C' = 0;$$

$$2) (x^m)' = mx^{m-1};$$

$$3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5) (e^x)' = e^x$$

$$6) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$7) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x$$

$$11) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Теорема (производная сложной функции)

Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f .

Тогда

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta u \rightarrow 0$, т.к. $u = g(x)$ – непрерывная функция)

Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Теорема доказана.

5. Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции $f(x)$.

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

6. Производная показательно- степенной функции.

Определение. Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x , $f(x) > 0$. Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v \ln u$$
$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$
$$y' = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$$

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$$

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x$; $v = x \cos x$;

Производные этих функций: $u' = 2x + 3$; $v' = \cos x - x \sin x$;

Окончательно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

7. Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x)$ при условии, что обратная ей функция $x = g(y)$ имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию $x = g(y)$ по x :

$$1 = g'(y)y'$$

т.к. $g'(y) \neq 0$

$$y' = \frac{1}{g'(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Пример. Найти формулу для производной функции arctg .

Функция arctg является функцией, обратной функции tg , т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y = \operatorname{tg} x; \quad x = \operatorname{arctg} y;$$

$$\text{Известно, что } y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(\operatorname{arctg} y)/dx}; \quad \frac{d(\operatorname{arctg} y)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Т.к. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + y^2$; то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1 + y^2};$$

Таким образом получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных.