Лекция 14Основные теоремы о дифференцируемых на интервале функциях
Теоремы о среднем.

1. Теорема Ролля.

(Ролль (1652-1719)- французский математик)

теорема. *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, a < ε < b, в которой производная функция f(x) равная нулю,*
f′(ε) = 0.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой y = f(x) касательная параллельна оси Ox. Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке функция f(x) на отрезке [a, b] принимает наибольшее и наименьшее значения. Обозначим эти значения M и m соответственно. Возможны два различных случая M = m и M ≠ m.

Пусть M = m. Тогда функция f(x) на отрезке [a, b] сохраняет постоянное значение и в любой точке интервала ее производная равна нулю. В этом случае за ε можно принять любую точку интервала.

Пусть M = m. Так значения на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает внутри отрезка [a, b]. Обозначим ε, a < ε < b точку, в которой f(ε) = M. Так как M- наибольшее значение функции, то для любого Δx (будем считать, что точка ε + Δx находится внутри рассматриваемого интервала) верно неравенство:

$$\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \Delta x) - f(\varepsilon) \le 0$$

При этом $\dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \le 0, & если \quad \Delta x > 0 \\ \ge 0, & если \quad \Delta x < 0 \end{cases}$

Но так как по условию производная в точке ε существует, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$.

Т.к. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \le 0$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \ge 0$, то можно сделать вывод:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \quad т.е. \quad f'(\varepsilon) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема Ролля имеет несколько **следствий**:

1) Если функция f(x) на отрезке [a, b] удовлетворяет теореме Ролля, причем f(a) = f(b) = = 0, то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что f′(ε) = 0. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

2) Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция f(x) имеет производную (n-1)- го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная (n – 1) – го порядка равна нулю.

2. Теорема Лагранжа.

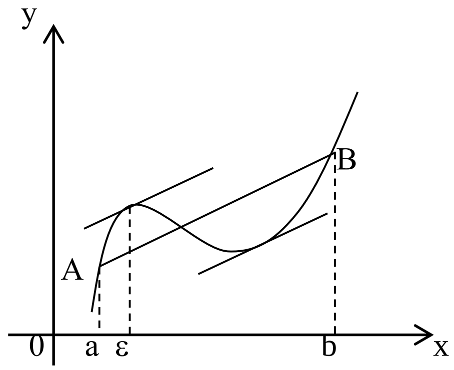
(Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик)

Теорема. *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε $a < \varepsilon < b$, такая, что* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\varepsilon)$.

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей АВ.



Если функция f(x) удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой y = f(x) касательная параллельна секущей, соединяющей точки А и В. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

Доказательство. Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - y_{сек\ AB}$$

Уравнение секущей АВ можно записать в виде:

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Функция F(x) удовлетворяет теореме Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b). По теореме Ролля существует хотя бы одна точка ε, a < ε < b, такая что F′(ε) = 0.

Т.к. $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, то $F'(\varepsilon)=f'(\varepsilon)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, следовательно

$$f'(\varepsilon)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Теорема доказана.

Определение. Выражение $\boxed{f(a)-f(b)=f'(\varepsilon)(b-a)}$ называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений.**

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

3. Теорема Коши.

(Коши (1789-1857)- французский математик)

Теорема. *Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что*

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.}$$

Т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε.

Для доказательства этой теоремы на первый взгляд очень удобно воспользоваться теоремой Лагранжа. Записать формулу конечных разностей для каждой функции, а затем разделить их друг на друга. Однако, это представление ошибочно, т.к. точка ε для каждой из функции в общем случае различна. Конечно, в некоторых частных случаях эта точка интервала может оказаться одинаковой для обеих функций, но это- очень редкое совпадение, а не правило, поэтому не может быть использовано для доказательства теоремы.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$

которая на интервале [a, b] удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Легко видеть, что при x = a и x = b F(a) = F(b) = 0. Тогда по теореме Ролля существует такая точка ε, a < ε < b, такая, что F′(ε) = 0. Т.к.

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x), \text{ то}$$

$$F'(\varepsilon)=0=f'(\varepsilon)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\varepsilon)$$

А т.к. $g'(\varepsilon)\neq 0$, то $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Теорема доказана.

Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при g(x) = x) теоремы Коши. Доказанная нами теорема Коши очень широко используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций, что будет подробно рассмотрено ниже.

4. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

(Лопиталь (1661-1704) – французский математик)

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty\cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty-\infty$$

Теорема (правило Лопиталя). *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки а, непрерывны в точке а, g′(x) отлична от нуля вблизи а и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между а и х. Учитывая, что f(a) = g(a) = 0:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при x→a отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками а и x, то при x→a получим ε→a, а следовательно и отношение $\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

Пример: Найти предел $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; $g'(x) = e^x$;

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e};$$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi - 2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \qquad g'(x) = e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right] = \frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)} = \frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x); \qquad g'(x) = 1+e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); \qquad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \qquad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0;$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; \qquad g'(x) = 1 - \cos x;$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}$ - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x) = e^x - e^{-x}; \qquad g''(x) = \sin x;$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ - применяем правило Лопиталя еще раз.

$f'''(x) = e^x + e^{-x}$; $\quad g'''(x) = \cos x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \dfrac{2}{1} = 2$;

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = \left[f(x)\right]^{g(x)}$, f(x)>0 вблизи точки а при x→a. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции lny = g(x)lnf(x).

Пример: Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

Здесь y = x^x, lny = xlnx.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{\begin{matrix} \textit{правило} \\ \textit{Лопиталя} \end{matrix}\right\} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0;$. Следовательно

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \ln \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

$f'(x) = 2x$; $\quad g'(x) = 2e^{2x}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{2x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$;- получили неопределенность. Применяем правило Лопиталя еще раз.

$f''(x) = 2$; $\quad g'(x) = 4e^{2x}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2e^{2x}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$;