

Лекция 15 Исследование функций с помощью производной.

1. Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b) , причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

1) Если функция $f(x)$ возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$, тогда:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть $f'(x) > 0$ для любых точек x_1 и x_2 , принадлежащих отрезку $[a, b]$, причем $x_1 < x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$

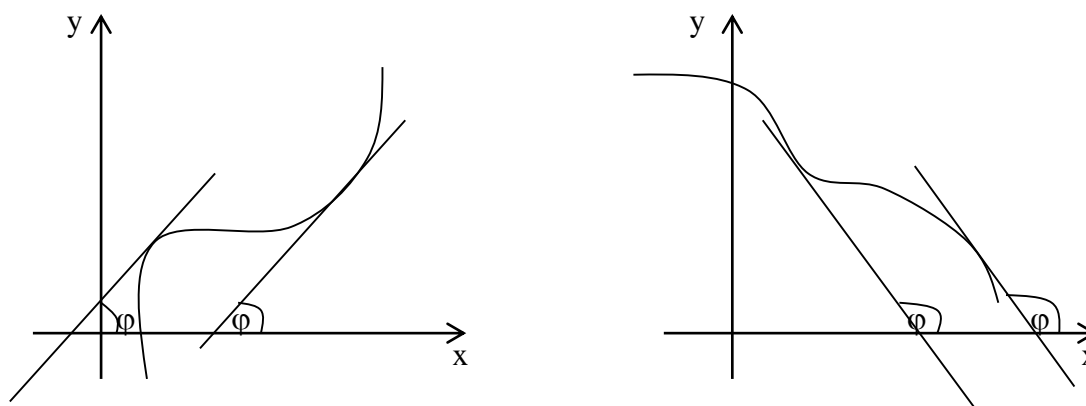
По условию $f'(\varepsilon) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b) , то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) .

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



2. Точки экстремума.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1 . Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и

минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум. Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x > 0$ верно неравенство:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1), \text{ т.е.}$$

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тогда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при } \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при } \Delta x > 0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x < 0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x > 0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x \rightarrow 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично.

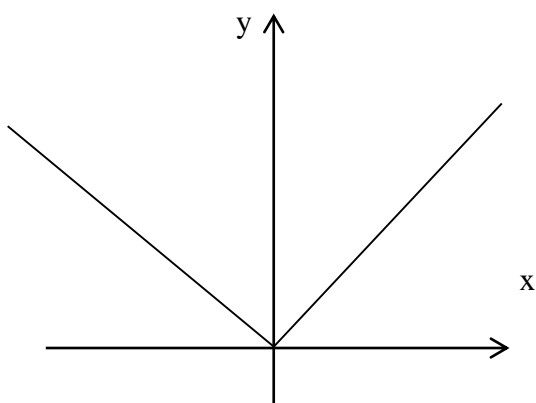
Теорема доказана.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

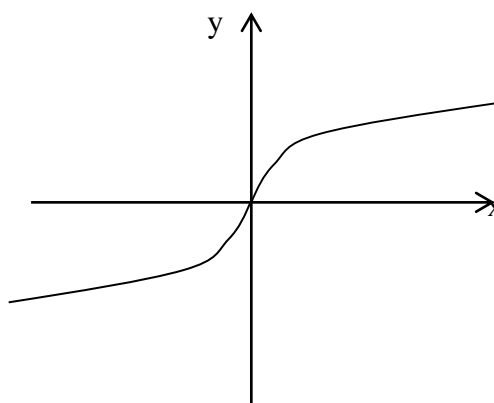
Определение. **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: $f(x) = |x|$



Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке $x = 0$ функция имеет минимум, но не имеет производной.

В точке $x = 0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.

Вообще говоря, функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) , который содержит критическую точку x_1 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+” - то функция имеет минимум.

Доказательство.

$$\text{Пусть } \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при } x < x_1 \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > x_1 \end{cases}$$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x < \varepsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon) > 0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1) < 0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

2) Если $x > x_1$, то $\varepsilon > x_1$; $f'(\varepsilon) < 0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1) < 0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1 , т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

- 1) Найти критические точки функции.
- 2) Найти значения функции в критических точках.
- 3) Найти значения функции на концах отрезка.
- 4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

3. Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1 .

Теорема. Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1) < 0$ и минимум, если $f''(x_1) > 0$.

Доказательство.

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1) < 0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1 .

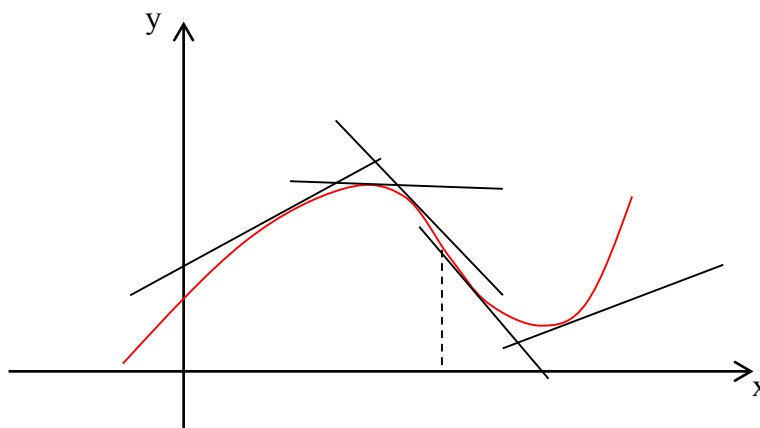
Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1 , но $f'(x_1) = 0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x < x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

4. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b) , если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью **вверх**, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью **вниз** – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: $y = f(x)$;

Уравнение касательной: $\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Следует доказать, что $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$.

$$y - \bar{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$: $y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c_1 < c$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \bar{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \bar{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b) , то кривая $y=f(x)$ вогнута на интервале (a, b) .

Теорема доказана.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.

Доказательство. 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ кривая вогнута, т.е. точка $x = a$ – точка перегиба.

2) Пусть $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x > b$. Тогда при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ – выпуклостью вверх. Тогда $x = b$ – точка перегиба.

Теорема доказана.

5. Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямыми и наклонными. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота $y = x$.

