

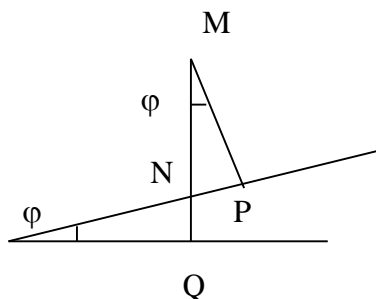
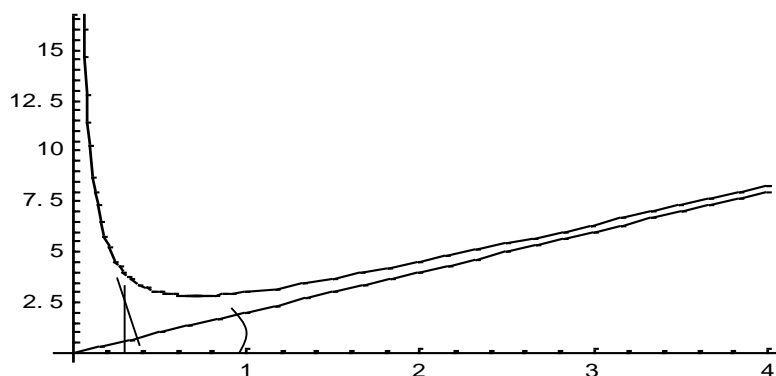
Лекция 16 Исследование функции(продолжение).
Вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ – асимптота кривой $y = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = \frac{2}{x-5}$ прямая $x = 5$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$.



Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – М, Р – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ох обозначим φ . Перпендикуляр MQ к оси Ох пересекает асимптоту в точке N.

Тогда $MQ = y$ – ордината точки кривой, $NQ = \bar{y}$ – ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \frac{|MP|}{\cos \varphi}$.

Угол φ – постоянный и не равный 90° , тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = \lim_{x \rightarrow \infty} |NM| \cos \varphi = \lim_{x \rightarrow \infty} |NM| = 0$$

$$|NM| = ||MQ| - |QN|| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

Итак, прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b .

В полученном выражении выносим за скобки x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Т.к. $x \rightarrow \infty$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$, т.к. $b = \text{const}$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} k = k$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] - \lim_{x \rightarrow \infty} b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k = 0$.

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: $y \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow 0-0$; $y \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow 0+0$, следовательно, $x = 0$ – вертикальная асимптота.

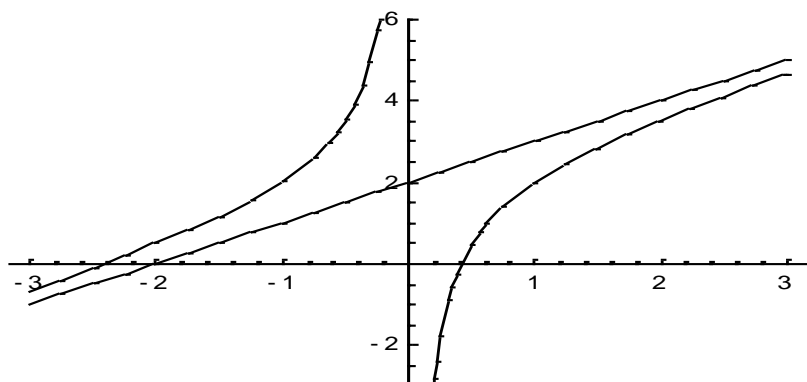
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2$$

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



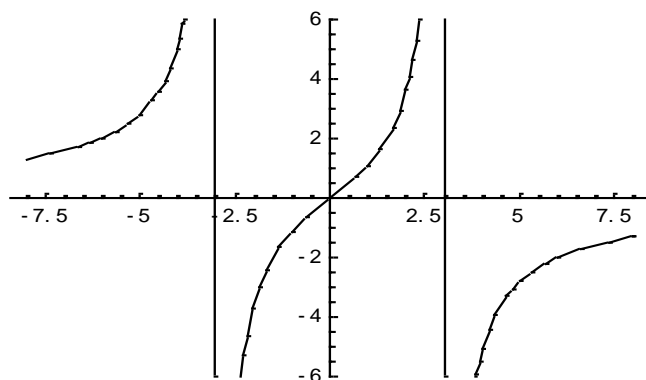
Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{9x}{9-x^2}$.

Прямые $x = 3$ и $x = -3$ являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{9-x^2} = 0$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$

$y = 0$ – горизонтальная асимптота.



Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

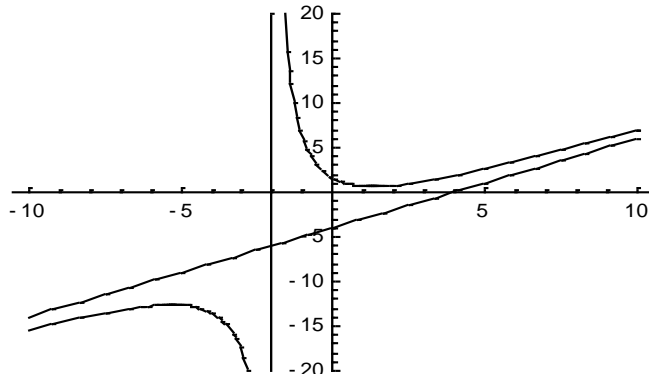
Прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4$$

Итого, прямая $y = x - 4$ является наклонной асимптотой.



6. Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).

3) Интервалы возрастания и убывания.

4) Точки максимума и минимума.

5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.

6) Области выпуклости и вогнутости.

7) Точки перегиба. (Если они имеются).

8) Асимптоты. (Если они имеются).

9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$$\begin{aligned} -\infty < x < -\sqrt{3}, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ -\sqrt{3} < x < -1, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ -1 < x < 0, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \\ 0 < x < 1, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ 1 < x < \sqrt{3}, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \\ \sqrt{3} < x < \infty, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \end{aligned}$$

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$$\begin{aligned} -\infty < x < -\sqrt{3}, & \quad y' > 0, \text{ функция возрастает} \\ -\sqrt{3} < x < -1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ -1 < x < 0, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ 0 < x < 1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ 1 < x < \sqrt{3}, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ \sqrt{3} < x < \infty, & \quad y' > 0, \text{ функция возрастает} \end{aligned}$$

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.

Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1; \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$.

Построим *график* функции:

