

Типовой расчёт операции над векторами.

Пример решения задачи

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A(1, 1, 1); B(5; 3; 1); C(3; 2; 3); D(-2, -1, 6)$.

1. Найти длину вектора \overrightarrow{AD} .
2. Найти угол между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .
3. Найти проекцию вектора \overrightarrow{AD} на вектор \overrightarrow{AB} .
4. Найти площадь грани ABC.
5. Найти объем пирамиды ABCD.

Координаты векторов: $\overrightarrow{AB} \{4, 2, 0\}; \overrightarrow{AC} \{2, 1, 2\}; \overrightarrow{AD} \{-3, -2, 5\}$.

1. Длина вектора $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$.

2. $\cos \widehat{AB, AC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 10;$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3.$$

$$\cos \widehat{AB, AC} = \frac{10}{2\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad (\widehat{AB, AC}) = \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. Проекция вектора \overrightarrow{AD} на вектор \overrightarrow{AB} : $\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 = -16; \quad |\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{5};$$

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = -\frac{16}{2\sqrt{5}} = -\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

4. $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$; $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 0 \cdot \vec{k} = 4(\vec{i} - 2\vec{j})$.

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{1^2 + 2^2} = 4\sqrt{5}; \quad S_{ABC} = 2\sqrt{5}.$$

$$5. \quad V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \right|; \quad (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4.$$

$$V_{ABCD} = \frac{2}{3}.$$

Контрольные варианты к задаче 1

Задача. Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Требуется найти:

- 1) длины векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} ;
- 2) угол между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} ;
- 3) проекцию вектора \overrightarrow{AD} на вектор \overrightarrow{AB} ;
- 4) площадь грани ABC;
- 5) объем пирамиды ABCD.

1. $A(-2; 0; 4), \quad B(4; -3; -2), \quad C(7; -2; 2), \quad D(-1; 2; 6).$

2. $A(0; -1; 1), \quad B(6; -4; -5), \quad C(9; -3; -1), \quad D(1; 1; 3).$

3. $A(-5; 1; 3), \quad B(1; -2; -3), \quad C(4; -1; 1), \quad D(-4; 3; 5).$

4. $A(-1; -3; 0), \quad B(5; -6; -6), \quad C(8; -5; -2), \quad D(0; -1; 2).$

5. $A(1; 2; 5), \quad B(7; -1; -1), \quad C(10; 0; 3), \quad D(2; 4; 7).$

6. $A(-3; -2; -1), \quad B(3; -5; -7), \quad C(6; -4; -3), \quad D(-2; 0; 1).$

7. $A(2; 3; 2), \quad B(8; 0; -4), \quad C(11; 1; 0), \quad D(3; 5; 4).$

8. $A(-4; 4; -2), \quad B(2; 1; -8), \quad C(5; 2; -4), \quad D(-3; 6; 0).$

9. $A(3; 5; -3), \quad B(9; 2; -9), \quad C(12; 3; -5), \quad D(4; 7; -1).$

10. $A(4; -4; 1), \quad B(10; -7; -5), \quad C(13; -6; -1), \quad D(5; -2; 3).$

11. $A(4; 0; 4), \quad B(0; 5; 0), \quad C(0; 0; 6), \quad D(1; 3; -1).$

12. $A(-1; -3; 4), \quad B(2; 3; -4), \quad C(-3; 1; -2), \quad D(4; -1; 3).$

13. $A(0; 0; 0), \quad B(2; 3; -1), \quad C(-2; 4; 5), \quad D(3; -1; 4).$

14. $A(3; 2; -4)$, $B(2; -5; 3)$, $C(-5; 6; -1)$, $D(5; 2; 4)$.
15. $A(6; 0; 1)$, $B(-6; 2; -3)$, $C(2; 2; 4)$, $D(3; 4; -2)$.
16. $A(-4; 1; -4)$, $B(0; -5; 0)$, $C(0; 0; -2)$, $D(-1; 3; 1)$.
17. $A(2; 3; 5)$, $B(3; -2; 6)$, $C(2; 2; -5)$, $D(6; 3; -3)$.
18. $A(5; -2; -1)$, $B(3; 3; 4)$, $C(3; -1; -2)$, $D(0; -1; 2)$.
19. $A(3; -1; -2)$, $B(5; -2; -1)$, $C(0; -1; 2)$, $D(3; 3; 4)$.
20. $A(5; 2; 4)$, $B(-5; 6; -1)$, $C(3; 2; -4)$, $D(2; -5; 3)$.
21. $A(4; 0; 0)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(1; 3; 2)$, $D(3; 2; 7)$.
22. $A(4; 2; 5)$, $B(0; 7; 1)$, $C(0; 2; 7)$, $D(1; 5; 0)$.
23. $A(4; 4; 10)$, $B(7; 10; 2)$, $C(2; 8; 4)$, $D(9; 6; 9)$.
24. $A(4; 6; 5)$, $B(6; 9; 4)$, $C(2; 10; 10)$, $D(7; 5; 9)$.
25. $A(3; 5; 4)$, $B(8; 7; 4)$, $C(5; 10; 4)$, $D(4; 7; 8)$.
26. $A(10; 6; 6)$, $B(-2; 8; 2)$, $C(6; 8; 9)$, $D(7; 10; 3)$.
27. $A(1; 8; 2)$, $B(5; 2; 6)$, $C(5; 7; 4)$, $D(4; 10; 9)$.
28. $A(6; 6; 5)$, $B(4; 9; 5)$, $C(4; 6; 11)$, $D(6; 9; 3)$.
29. $A(7; 2; 2)$, $B(5; 7; 7)$, $C(5; 3; 1)$, $D(2; 3; 7)$.
30. $A(8; 6; 4)$, $B(10; 5; 5)$, $C(5; 6; 8)$, $D(8; 10; 7)$.