Типовой расчетОперации над матрицами и вычисление определителей. Умножение матрицы на число

Пример 1

Произведением матрицы A на число α называется матрица $B=\alpha A$, элементы которой $b_{ij}=\alpha a_{ij}$ при $i=1,2,\dots,m;$ $j=1,2,\dots,n$. Например, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 8\end{pmatrix}$, то $5A=\begin{pmatrix}-10 & 20\\ 15 & 40\end{pmatrix}$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix}20 & 12 & 6\\ 52 & 2 & 0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}10 & 6 & 3\\ 26 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0\cdot A=O$.

Сложение матриц. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ при $i=1,2,\dots,m;$ $j=1,2,\dots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например, $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 6 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $C=A+B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -4\\ 8 & 10 & 7\end{pmatrix}$.

В частном случае $A+O=A$.

Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A-B=A+(-1)\cdot B$.

Умножение матриц. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.
Тогда **произведением матриц** $\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj},\quad i=1,2,\dots,m;\quad j=1,2,\dots,n.$$

Пример. Вычислить произведение матриц $A\cdot B$,

где $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & 4 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times 3}{A}\cdot\underset{3\times 3}{B}=\underset{2\times 3}{C}$. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 + 0\cdot 5 + 2\cdot(-2) & (-1)\cdot 0 + 0\cdot 4 + 2\cdot 0 & (-1)\cdot 1 + 0\cdot 4 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 3 + 4\cdot 5 + 0\cdot(-2) & 3\cdot 0 + 4\cdot 4 + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 + 4\cdot 4 + 0\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем $C = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 29 & 16 & 19 \end{pmatrix}$.

Возведение в степень. Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных А, т.е. $A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$.

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0 = E$, $A^1 = A$. Нетрудно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$, $(A^m)^k = A^{mk}$.

Пример. Найти A^2, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}$. Необходимо заметить, что из равенства $A^m = O$ еще не следует, что матрица A=O.

Транспонирование матрицы – переход от матрицы А к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется **транспонированной** относительно матрицы А:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица А имеет размер $m\times n$, то транспо- нированная матрица A' имеет размер $n\times m$.

Например, $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $A'_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например $A^т$.

Задача 1. Найти, если это возможно, произведение матриц AB и BA.

1.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2.	$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-2&-2&-2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}$.	
4. $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&4&3&2&1\end{pmatrix}$.	5. $A=\begin{pmatrix}0&1&10\\3&5&7\\-4&-2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.
6. $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&5\end{pmatrix}$.	
7. $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\-4\\-5\end{pmatrix}$.	8. $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&1\\0&\sqrt{3}&1\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$.
9. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&10&0\\1&0&100\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&4\\-1&0&-1\\-5&-3&-2\end{pmatrix}$.	
10. $2A=\begin{pmatrix}2&4&6\\2&-2&-8\\0&-4&-6\end{pmatrix}$, $3B=\begin{pmatrix}3&9&6\\0&-6&9\\9&-3&15\end{pmatrix}$.	
11. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\x&x&x\\x^2&x^2&x^2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x^2&x^2&x^2\\x&x&x\\1&1&1\end{pmatrix}$.	
12. $A=\begin{pmatrix}2&3&4&-5\\1&2&3&-4\\-1&-2&-3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&1&-1\\1&3&2\\2&0&1\end{pmatrix}$.	
13. $A=\begin{pmatrix}a&a&a\\1&1&1\\-a&a&-a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-a&1&a\\a&1&-a\\-a&1&a\end{pmatrix}$.	14. $A=\begin{pmatrix}1&-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}1&3\\4&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6&9\\2&-3\end{pmatrix}.$	16. $A=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&2&0\\2&2&2\end{pmatrix}.$
17. $A=\begin{pmatrix}10&20&30\\0&1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\3&4\end{pmatrix}.$	18. $A=\begin{pmatrix}5&4&3\\0&1&2\\-1&-5&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}.$
19. $A=\begin{pmatrix}-1\\-5\\-10\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&-1&0\\0&-5&0\\5&5&7\end{pmatrix}.$	
20. $A=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\1/3&1/3&1/3\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1/2&0\\2/3&1/3&0\end{pmatrix}.$	
21. $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\\1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&5\\4&-1\end{pmatrix}.$	
22. $A=\begin{pmatrix}\mathrm{tg}^2\alpha&\cos^2\alpha\\\sin^2\alpha&\mathrm{ctg}^2\alpha\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha&\sin^2\alpha\\\cos^2\alpha&\sin^2\alpha\end{pmatrix}.$	
23. $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\5&4&4\\1&3&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$	24. $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&7\\1&0&9\\0&6&3\end{pmatrix}.$
25. $A=\begin{pmatrix}\cos3\alpha&\sin2\alpha\\-\sin2\alpha&\cos3\alpha\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\cos3\alpha&\sin2\alpha\\-\sin2\alpha&\cos3\alpha\end{pmatrix}.$	
26. $5A=\begin{pmatrix}0&5&10\\50&10&100\\0&10&20\end{pmatrix},\quad 3B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$	
27. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad B=A^2.$	28. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&a&a\\b&b&b\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&a&b\\1&a&b\\1&a&b\end{pmatrix}.$
29. $A=\begin{pmatrix}2&2&2\\4&4&4\\8&8&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/8\end{pmatrix}.$	
30. $A=\begin{pmatrix}-15&3&0\\1&23&10\\0&10&27\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-2&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$	

Пример 2

Определители квадратных матриц

Необходимость введения определителя – числа, характеризующего квадратную матрицу А, тесно связано с решением систем линейных уравнений. Определитель матрицы А обозначается $|A|$, Δ или det A.

Определителем матрицы первого порядка $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{11})$, или **определителем первого порядка**, называется элемент a_{11}: $\Delta_1 = |\mathrm{A}| = \mathrm{a}_{11}$. Например, пусть $\mathrm{A} = (8)$, тогда $\Delta_1 = |\mathrm{A}| = 8$.

Определителем матрицы второго порядка $\mathrm{A} = \left(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\right)$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое отыскивается по формуле

$\Delta_2 = |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22} - \mathrm{a}_{12}\mathrm{a}_{21}$. Например, пусть $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$,

тогда $\Delta_2 = |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - 8 \cdot 1 = -18$.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{13} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем матрицы третьего порядка $\mathrm{A} = \left(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\right)$**, или определителем третьего порядка,** называется число, которое находится по формуле

$$\Delta_3 = |\mathrm{A}| = \mathrm{a}_{11} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} \\ \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{33} \end{vmatrix} - \mathrm{a}_{12} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{23} \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{33} \end{vmatrix} + \mathrm{a}_{13} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 21.$

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарруса). Покажем это на схеме

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 0 + 4 - 12 - 0 + 10 - 4 = -2.$$

Для того, чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потре- буются некоторые дополнительные понятия.

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1)-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i+j)$ - нечетное число. Например,
$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

Пример. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Определителем квадратной матрицы A n-го **порядка называется число, равное сумме произведений элементов 1-й строки на их алгебраические дополнения:** $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{s=1}^{n} a_{1S}A_{1S}$ (разложение по элементам 1-й строки).

Так, например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

Знание свойств определителей позволит избежать громоздких вычислений.

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу тре-угольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элемента 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на
(-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 12 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем

$$|\mathrm{A}| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

Пример. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

(Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю).

Раскладывая по первому столбцу, получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 2 \cdot 3(-1) \cdot 4 + 0 = -24.$$

На частном примере убеждаемся в том, что определитель треугольной (и, очевидно, диагональной) матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Задача 2. Вычислить определитель четвертого порядка.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.	2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.	3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.
4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.	5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.	6. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.
7. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 6 \\ 6 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.	8. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.	9. $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}$.
10. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.	11. $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ -10 & -20 & 30 & -40 \end{vmatrix}$.	12. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.
13. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.	14. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 6 & 8 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.	15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.
16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$	17. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.	18. $\begin{vmatrix} -5 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & -9 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.
19. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 8 & 2 \end{vmatrix}$.	20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & -1 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}$.	21. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 4 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.	23. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$.	24. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 9 & 8 & 5 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$.
25. $\begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.	26. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 0 & 10 \end{vmatrix}$.	27. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.
28. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.	29. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{8} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{6} & \sqrt{8} & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$.	30. $\begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix}$.