Типовой расчет. Системы линейных уравнений.

Задача 3. Решить систему методом Крамера и средствами матричного исчисления

$$\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ 3x+2y+z=5 \\ 5x-y+z=12 \end{cases}.$$

Решение. 1-й способ: метод Крамера. Найдем определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4-3+15-10+2-9=-1.$$

Так как $\Delta=-1\neq 0$, система имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера: $x=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $z=\frac{\Delta_3}{\Delta}$, где Δ_i - определитель, полу-чаемый из определителя системы Δ заменой i-го столбца на столбец правых частей: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 10 & -4 & 0 \end{vmatrix}=-12+10=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{-1}=2,$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix}=10-9=1 \Rightarrow y=\frac{1}{-1}=-1,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 17 & 0 & 38 \\ 13 & 0 & 29 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 17 & 38 \\ 13 & 29 \end{vmatrix}=17\cdot 29-13\cdot 38=493-494=.$$

$$=-1\Rightarrow z=\frac{-1}{-1}=1.$$

Ответ: $x=2,\ y=-1,\ z=1.$

2-й способ: решить систему матричным способом. Введем обозначения

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричном виде систему можно записать следующим образом: $AX=B$

.

Определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$; следовательно, матрица А - невыро-
жденная и существует обратная ей матрица A^{-1}. Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы А:

$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3,\qquad A_{21}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,$

$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=2,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1,$

$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-13,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}=17,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5.$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}3 & -4 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ -13 & 17 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -1\\ -2 & 3 & -1\\ 13 & -17 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение системы $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B,$

т. е. $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -1\\ -2 & 3 & -1\\ 13 & -17 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+20-12\\ -4+15-12\\ 26-85+60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$

Ответ: $x=2,\ y=-1,\ z=1.$

Задача 3. Решить систему методом Крамера и средствами матричного исчисления.

1. $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 4x-3y+z=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}.$	2. $\begin{cases} x+4y-3z=-7 \\ x-3y+2z=0 \\ 2x-5y-z=-1 \end{cases}.$	3. $\begin{cases} 3x+2y+2z=1 \\ 2x-3y-z=3 \\ x+y+2z=-2 \end{cases}.$
4. $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}.$	5. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y+z=8 \end{cases}.$	6. $\begin{cases} 4x+5y-2z=-3 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}.$
7. $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}.$	8. $\begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ x+4y+2z=-1 \\ x-4y=-7 \end{cases}.$	9. $\begin{cases} x+y-2z=16 \\ 2x+3y-7z=16 \\ 5x+2y+z=16 \end{cases}.$
10. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}.$	11. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=14 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}.$	12. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 8x+3y-6z=2 \\ -4x-y+3z=-3 \end{cases}.$
13. $\begin{cases} 7x-5y=31 \\ 4x+11y=-43 \\ 2x+3y+4z=-20 \end{cases}.$	14. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}.$	15. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}.$
16. $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 4x-3y+z=1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}.$	17. $\begin{cases} 3x+y+z=5 \\ x-4y-2z=-3 \\ -3x+5y+6z=7 \end{cases}.$	18. $\begin{cases} 2x-y+5z=4 \\ 5x+2y+13z=2 \\ 3x-y+5z=0 \end{cases}.$
19. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-4y-3z=-1 \\ x+5y+z=0 \end{cases}.$	20. $\begin{cases} 5x+8y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}.$	21. $\begin{cases} 3x+5y+7z=24 \\ x+y-z=8 \\ 3x+4y-z=27 \end{cases}.$
22. $\begin{cases} 7x+2y+3z=5 \\ 3x-3y+5z=6 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}.$	23. $\begin{cases} 3x+4y+5z=7 \\ 2x-y+z=0 \\ 5x+3y+3z=1 \end{cases}.$	24. $\begin{cases} 2x-3y-z=4 \\ x+y-z=3 \\ x-y-z=1 \end{cases}.$
25. $\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x+2y+z=9 \\ x+y-z=0 \end{cases}.$	26. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-3y+2x=1 \\ 3x+2y+z=4 \end{cases}.$	27. $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 5x+y-z=2 \\ 3x+3y+z=3 \end{cases}.$
28. $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+3y+z=7 \\ x+5y+3z=8 \end{cases}.$	29. $\begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ x+y+z=5 \\ 6x+y-5z=3 \end{cases}.$	30. $\begin{cases} 2x+3y-6z=15 \\ x+y-2z=6 \\ 5x-6y+z=8 \end{cases}.$

Задача 4. Исследовать систему на совместность. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Пример 1. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \end{cases}.$

Решение. Составим матрицу A системы и ее расширенную матрицу $\overline{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 9 & 5 \\ 6 & 5 & -3 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{c|ccccc} 6 & 1 & -3 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 9 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & -2 & 6 & 5 & 8 \end{array}\right).$$

Приведем матрицу $\overline{A}$ элементарными преобразованиями над строками к треугольному виду или к виду трапеции:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1 & -3 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 9 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ \hline 4 & 7 & -2 & 6 & 5 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ +(-3) \\ \cdots(-2) \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -7 & 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (-7)+ \; + \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ (-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Видим, что $r_A = 3$, так как $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,

$r_{\overline{A}} = 4$, так как $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Так как ранги матриц A и $\overline{A}$ не совпадают, система несовместна.

Пример 2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$.

Решение. Приведем матрицу $\overline{A}$ элементарными преобразованиями над строками к виду трапеции:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & -3 \end{array}\right),$$

$r_A = r_{\overline{A}} = 2$, так как $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Следовательно, система совместна. Число неизвестных $(n = 4)$ системы больше ранга системы. Следовательно, система имеет бесконечно много решений. Так как в базисный минор $\Delta \neq 0$ входят коэффициенты при неизвестных x_1 и x_2, переменные x_1 и x_2 будут базисными, а x_3 и x_4 -свободными. Выразим основные неизвестные через свободные. Пусть $x_3 = C_3, x_4 = C_4$.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - C_3 + 2C_4 = 2 \\ -x_2 + 4C_3 - 7C_4 = -3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + C_3 - 2C_4 \\ x_2 = 3 + 4C_3 - 7C_4 \end{cases}.$$

Из первого уравнения выразим x_1:

$$x_1 = 2 + C_3 - 2C_4 - x_2 = 2 + C_3 - 2C_4 - 3 - 4C_3 + 7C_4;$$

$$x_1 = -1 - 3C_3 + 5C_4.$$

Общее решение системы запишем в виде

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3C_3 + 5C_4 \\ x_2 = 3 + 4C_3 - 7C_4 \\ x_3 = C_3 \\ x_4 = C_4 \end{cases},$$

где $C_3, C_4 \in R$.

Задача 5. Доказать, что векторы $\overline{a}_1(1, 0, 1, 1)$, $\overline{a}_2(-1, 1, 1, 1)$, $\overline{a}_3(1, 0, 0, 1)$, $\overline{a}_4(2, 1, 3, 2)$ образуют базис в R^4 (если известно, что размерность R^4 равна четырем) и разложить вектор $\overline{b} = (0, 4, 8, 6)$ по этому базису .

Решение. Чтобы доказать, что векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$ образуют базис в пространстве R^4, достаточно проверить, что определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{Умножим первый} \\ \text{столбец на } (-1) \text{ и} \\ \text{прибавим к} \\ \text{четвертому столбцу} \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{Разложим} \\ \text{определитель} \\ \text{по третьей} \\ \text{строке} \end{array} \right| =$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{Разложим}\\ \text{определитель}\\ \text{по первой}\\ \text{строке}\end{matrix}\right|=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Значит, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ образуют базис в R^4. Пусть вектор $\bar{b}$ имеет в этом базисе координаты x_1, x_2, x_3, x_4; т. е.
$\bar{b}=x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+x_3\bar{a}_3+x_4\bar{a}_4$. Запишем это равенство в координатной форме:

$$\begin{pmatrix}0\\4\\8\\6\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2\\1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{или}\ \begin{cases}0=x_1-x_2+x_3+2x_4\\ 4=x_2+x_4\\ 8=x_1+x_2+3x_4\\ 6=x_1+x_2+x_3+2x_4\end{cases}.$$

Таким образом, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3+2x_4=0\\ x_2+x_4=4\\ x_1+x_2+3x_4=8\\ x_1+x_2+x_3+2x_4=6\end{cases}.$$

Будем использовать метод Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 0 & 3 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6\end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 8\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6\end{array}\right):2 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 8\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)\begin{matrix}(-1) & (-2)\\ + & +\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Этой матрице соответствует система уравнений, эквивалентная исходной системе:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3+2x_4=0\\ x_2=3\\ -x_3+x_4=2\\ x_4=1\end{cases},\quad \begin{cases}x_1=2\\ x_2=3\\ x_3=-1\\ x_4=1\end{cases}.$$

Итак, $\bar{b} = 2\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 - \bar{a}_3 + \bar{a}_4$.

Ответ: $\bar{b} = 2\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 - \bar{a}_3 + \bar{a}_4$.

Задача 4. Исследовать систему на совместность. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 13x_3 - 18x_4 = -1 \end{cases}$.	2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6 \end{cases}$.
3. $\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8 \end{cases}$.	4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5 \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$.
5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 12x_5 = 0 \end{cases}$.	6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$.
7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$.	8. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 19 \end{cases}$.
9. $\begin{cases} 5x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$.	10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$.
11. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$.	12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$.
13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$.	14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1. \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3+2x_4+5x_5=2 \\ -3x_1+5x_2+2x_3+3x_4+4x_5=2 \end{cases}$.	16. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2 \\ x_1+2x_2+3x_3=-1 \\ x_1-3x_2-2x_3=3 \end{cases}$.
17. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+3x_5=2 \\ x_1-x_2-3x_3-4x_4-3x_5=-4 \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4+2x_5=1 \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-5x_5=-7 \end{cases}$.	18. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0 \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=1 \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=-1 \\ x_2-x_3+x_4-2x_5=-1 \end{cases}$.
19. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=4 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=6 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=6 \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=14 \end{cases}$.	20. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=1 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=-1 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=-2 \end{cases}$.
21. $\begin{cases} 2x-2y+2z=2 \\ x+y+z=3 \\ 2x-3y+2z=1 \\ 3x+2y+z=4 \end{cases}$.	22. $\begin{cases} 15x_1+2x_2+4x_3-3x_4+9x_5=23 \\ 3x_1+20x_2+5x_3-x_4+6x_5=-8 \\ 3x_1+6x_2+2x_3-x_4+3x_5=1 \\ 9x_1+4x_2+3x_3-2x_4+6x_5=12 \end{cases}$.
23. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_5=-2 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=7 \\ 2x_1-4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=1 \end{cases}$.	24. $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3+4x_4+6x_5=5 \\ 3x_1-x_2-x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+3x_5=3 \\ 4x_1-4x_3-2x_4-3x_5=-1 \end{cases}$.
25. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+6x_3+x_4=10 \\ x_1-x_2+3x_3+x_4=2 \end{cases}$.	26. $\begin{cases} x_1+x_5=1 \\ x_1+x_3=2 \\ x_1-x_4=5 \end{cases}$.
27. $\begin{cases} 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5=10 \\ 8x_1+4x_2+2x_4+3x_5=5 \\ 5x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=4 \\ 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4+6x_5=7 \end{cases}$.	28. $\begin{cases} 13x_1-4x_2-x_3-4x_4-6x_5=8 \\ 11x_1-2x_2+x_3-2x_4-3x_5=7 \\ 5x_1+4x_2+7x_3+4x_4+6x_5=4 \\ 7x_1+2x_2+5x_3+2x_4+3x_5=5 \end{cases}$.
29. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+6x_4+9x_5=2 \\ x_2-2x_3+2x_4+3x_5=-7 \\ 2x_1+x_2+4x_3+2x_4+3x_5=3 \\ 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4+6x_5=1 \end{cases}$.	30. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4+2x_5=1 \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4+4x_5=4 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4+6x_5=5 \end{cases}$.