

Задача 1

Общее уравнение плоскости имеет вид: $Ax + Bx + Cz + D = 0$, где $\vec{n} = \{A; B; C\}$ - ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости (нормальный вектор плоскости).

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $[M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2) \text{ и } M_3(x_3, y_3, z_3)]$ определяется равенством

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + Bx + Cz + D = 0$ находится по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Пример 1

Найти расстояние от точки $M_0(1, -2, 3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3, -1, 2), M_2(4, -1, -1), M_3(2, 0, 2)$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 :

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y + 1 & z - 2 \\ 4 - 3 & -1 + 1 & -1 - 2 \\ 2 - 3 & 0 + 1 & 2 - 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x - 3 & y + 1 & z - 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разложив его по первой строке:

$$(x - 3) \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y + 1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z - 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$3(x - 3) + 3(y + 1) + (z - 2) = 0; \quad 3x + 3y + z - 9 + 3 - 2 = 0; \quad 3x + 3y + z - 8 = 0.$$

Найдем расстояние от точки M_0 до плоскости $3x + 3y + z - 8 = 0$.

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 - 8|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{19}} = \frac{8\sqrt{19}}{19}.$$

Контрольные варианты к задаче 1

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки

M_1, M_2 и M_3 :

1. $M_1(-3, 4, -7), M_2(1, 5, -4), M_3(-5, -2, 0), M_0(-12, 7, -1)$.
2. $M_1(-1, 2, -3), M_2(4, -1, 0), M_3(2, 1, -2), M_0(1, -6, -5)$.

3. $M_1(-3, -1, 1)$,	$M_2(-9, 1, -2)$,	$M_3(3, -5, 4)$,	$M_0(-7, 0, -1)$.
4. $M_1(1, -1, 1)$,	$M_2(-2, 0, 3)$,	$M_3(2, 1, -1)$,	$M_0(-2, 4, 2)$.
5. $M_1(1, 2, 0)$,	$M_2(1, -1, 2)$,	$M_3(0, 1, -1)$,	$M_0(2, -1, 4)$.
6. $M_1(1, 0, 2)$,	$M_2(1, 2, -1)$,	$M_3(2, -2, 1)$,	$M_0(-5, -9, 1)$.
7. $M_1(1, 2, -3)$,	$M_2(1, 0, 1)$,	$M_3(-2, -1, 6)$,	$M_0(3, -2, -9)$.
8. $M_1(3, 10, -1)$,	$M_2(-2, 3, -5)$,	$M_3(-6, 0, -3)$,	$M_0(-6, 7, -10)$.
9. $M_1(-1, 2, 4)$,	$M_2(-1, -2, -4)$,	$M_3(3, 0, -1)$,	$M_0(-2, 3, 5)$.
10. $M_1(0, -3, 1)$,	$M_2(-4, 1, 2)$,	$M_3(2, -1, 5)$,	$M_0(-3, 4, -5)$.
11. $M_1(1, 3, 0)$,	$M_2(4, -1, 2)$,	$M_3(3, 0, 1)$,	$M_0(4, 3, 0)$.
12. $M_1(-2, -1, -1)$,	$M_2(0, 3, 2)$,	$M_3(3, 1, -4)$,	$M_0(-21, 20, -16)$.
13. $M_1(-3, -5, 6)$,	$M_2(2, 1, -4)$,	$M_3(0, -3, -1)$,	$M_0(3, 6, 68)$.
14. $M_1(1, 5, -7)$,	$M_2(-3, 6, 3)$,	$M_3(-2, 7, 3)$,	$M_0(1, -1, 2)$.
15. $M_1(1, -1, 2)$,	$M_2(2, 1, 2)$,	$M_3(1, 1, 4)$,	$M_0(-3, 2, 7)$.
16. $M_1(1, 3, 6)$,	$M_2(2, 2, 1)$,	$M_3(-1, 0, 1)$,	$M_0(5, -4, 5)$.
17. $M_1(-4, 2, 6)$,	$M_2(2, -3, 0)$,	$M_3(-10, 5, 8)$,	$M_0(-12, 1, 8)$.
18. $M_1(7, 2, 4)$,	$M_2(7, -1, -2)$,	$M_3(-5, -2, -1)$,	$M_0(10, 1, 8)$.
19. $M_1(2, 1, 4)$,	$M_2(3, 5, -2)$,	$M_3(-7, -3, 2)$,	$M_0(-3, 1, 8)$.
20. $M_1(-1, -5, 2)$,	$M_2(-6, 0, -3)$,	$M_3(3, 6, -3)$,	$M_0(10, -8, -7)$.
21. $M_1(0, -1, -1)$,	$M_2(-2, 3, 5)$,	$M_3(1, -5, -9)$,	$M_0(-4, -13, 6)$.
22. $M_1(5, 2, 0)$,	$M_2(2, 5, 0)$,	$M_3(1, 2, 4)$,	$M_0(-3, -6, -8)$.
23. $M_1(2, -1, -2)$,	$M_2(1, 2, 1)$,	$M_3(5, 0, -6)$,	$M_0(14, -3, 7)$.
24. $M_1(-2, 0, -4)$,	$M_2(-1, 7, 1)$,	$M_3(4, -8, -4)$,	$M_0(-6, 5, 5)$.
25. $M_1(14, 4, 5)$,	$M_2(-5, -3, 2)$,	$M_3(-2, -6, -3)$,	$M_0(-1, -8, 7)$.
26. $M_1(1, 2, 0)$,	$M_2(3, 0, -3)$,	$M_3(5, 2, 6)$,	$M_0(-13, -8, 16)$.
27. $M_1(2, -1, 2)$,	$M_2(1, 2, -1)$,	$M_3(3, 2, 1)$,	$M_0(-5, 3, 7)$.
28. $M_1(1, 1, 2)$,	$M_2(-1, 1, 3)$,	$M_3(2, -2, 4)$,	$M_0(2, 3, 8)$.
29. $M_1(2, 3, 1)$,	$M_2(4, 1, -2)$,	$M_3(6, 3, 7)$,	$M_0(-5, -4, 8)$.
30. $M_1(1, 1, -1)$,	$M_2(2, 3, 1)$,	$M_3(3, 2, 1)$,	$M_0(-3, -7, 6)$.

Задача 2

Косинус угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}| \cdot |\overrightarrow{N_2}|} \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пример 2

Найти угол между плоскостями $x + y - 1 = 0$ и $2x - y + \sqrt{3}z + 1 = 0$.

Найдем косинус искомого угла:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 1(-1) + 0 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{4}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{4}.$$

Контрольные варианты к задаче 2

Найти угол между плоскостями:

1. $x - 3y + 5 = 0, 2x - y + 5z - 16 = 0$.
2. $x - 3y + z - 1 = 0, x + z - 1 = 0$.
3. $4x - 5y + 3z - 1 = 0, x - 4y - z + 9 = 0$.
4. $3x - y + 2z + 15 = 0, 5x + 9y - 3z - 1 = 0$.
5. $6x + 2y - 4z + 17 = 0, 9x + 3y - 6z - 4 = 0$.
6. $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0, x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$.
7. $3y - z = 0, 2y + z = 0$.
8. $6x + 3y - 2z = 0, x + 2y + 6z - 12 = 0$.
9. $x + 2y + 2z - 3 = 0, 16x + 12y - 15z - 1 = 0$
10. $2x - y + 5z + 16 = 0, x + 2y + 3z + 8 = 0$.
11. $2x + 2y + z - 1 = 0, x + z - 1 = 0$.
12. $3x + y + z - 4 = 0, x + 2y + 3z + 8 = 0$.
13. $3x - 2y - 2z - 16 = 0, x + y - 3z - 7 = 0$.
14. $2x + 2y + z + 9 = 0, x - y + 3z - 1 = 0$.
15. $x + 2y + 2z - 3 = 0, 2x - y + 2z + 5 = 0$.
16. $3x + 2y - 3z = 0, x + y + z - 7 = 0$.
17. $x - 3y - 2z - 8 = 0, x + y - z + 3 = 0$.
18. $3x - 2y + 3z + 23 = 0, y + z + 5 = 0$.
19. $x + y + 3z - 7 = 0, y + z - 1 = 0$.
20. $x - 2y + 2z + 17 = 0, x - 2y - 1 = 0$.
21. $x + 2y - 1 = 0, x + y + 6 = 0$.
22. $2x - z + 5 = 0, 2x + 3y - 7 = 0$.
23. $5x + 3y + z - 18 = 0, 2y + z - 9 = 0$.
24. $4x + 3z - 2 = 0, x + 2y + 2z + 5 = 0$.
25. $x + 4y - z + 1 = 0, 2x + y + 4z - 3 = 0$.
26. $2y + z - 9 = 0, x - y + 2z - 1 = 0$.

$$27. 2x - 6y + 14z - 1 = 0, 5x - 15y + 35z - 3 = 0.$$

$$28. x - y + 7z - 1 = 0, 2x - 2y - 5 = 0.$$

$$29. 3x - y - 5 = 0, 2x + y - 3 = 0.$$

$$30. x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0, x - y + z\sqrt{2} - 1 = 0$$

Задача 3

Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad (9)$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка, лежащая на прямой, а $\vec{S} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой (ненулевой вектор, параллельный прямой).

Чтобы перейти от общих уравнений прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

к ее каноническим уравнениям, нужно на прямой найти какую-нибудь точку M_0 и определить направляющий вектор прямой \vec{S} . Точку M_0 можно найти так: задаем произвольно значение одной переменной, например, $z = z_0$, и из общих уравнений прямой (10) найдем значения x_0 и y_0 . Направляющий вектор \vec{S} параллелен

линии пересечения плоскостей (10) и, следовательно, перпендикулярен векторам $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$. Поэтому в качестве \vec{S} можно взять вектор

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 3

Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

Найдем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на прямой. Пусть $z_0 = 0$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} x_0 - 2y_0 = 4, \\ 3x_0 + 2y_0 = 4. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $x_0 = 2$ и $y_0 = -1$. Таким образом, $M_0(2, -1, 0)$. Найдем направляющий вектор прямой

$$\bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 14\bar{j} + 8\bar{k}.$$

Запишем канонические уравнения: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}$ или $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$.

Контрольные варианты к задаче 3

Написать канонические уравнения прямой:

$$1. \begin{cases} 2x - y - 3z + 1 = 0, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 8x + 3y - 6z - 2 = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x + 5y - 3z - 4 = 0, \\ 4x - 3y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x + 4y + 2z - 8 = 0, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x + 2y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0, \\ 2x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 2x + 2y - z - 8 = 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x + 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x + 5y + 2z + 11 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 4x + y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 6x - 7y - 4z - 2 = 0, \\ x + 7y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0, \\ 6x + 5y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ 4x - 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x + 7y - z - 8 = 0, \\ x + 2y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x - 4y - 3z + 3 = 0, \\ 3x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x + y + z - 5 = 0, \\ 4x - 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0, \\ x + 3y + z + 14 = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ x - y - 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + z + 6 = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 8x - y - 3z - 1 = 0, \\ x + y + z + 10 = 0. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x + 5y - z - 5 = 0, \\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0, \\ 2x - y - 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5x + y + 2z + 4 = 0, \\ x - y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0. \end{cases}$$

Задача 4

Точка пересечения Р прямой и плоскости находится следующим образом:

уравнения прямой приводят к параметрическому виду $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \text{ затем} \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

подставляют в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и определяют значение параметра t , соответствующее точке пересечения. Если при такой подстановке уравнение плоскости выполняется при любом t , то прямая лежит в плоскости, а если не выполняется ни при каком t , то прямая параллельна плоскости. Найденное значение t подставляют в параметрические уравнения прямой.

Пример 4

Найти точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Приведем уравнения прямой к параметрическому виду:

$$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} = t; \quad \frac{x-12}{4} = t \Rightarrow x = 12 + 4t; \quad \frac{y-9}{3} = t \Rightarrow y = 9 + 3t;$$

$$\frac{z-1}{1} = t \Rightarrow z = 1 + t, \text{ т. е. параметрические уравнения прямой имеют вид}$$

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Подставив x, y, z в уравнение плоскости, найдем t :

$$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0; \quad t = -3.$$

Искомая точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты

$$x_0 = 12 + 4(-3) = 0; \quad y_0 = 9 + 3(-3) = 0; \quad z_0 = 1 - 3 = -2, \text{ т. е. } P(0, 0, -2).$$

Контрольные варианты к задаче 4

Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$ и $x + 2y + 3z - 14 = 0.$
2. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$ и $x + 2y - 5z + 20 = 0.$
3. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$ и $x - 3y + 7z - 24 = 0.$
4. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$ и $2x - y + 4z = 0.$
5. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$ и $3x + y - 5z - 12 = 0.$
6. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$ и $x + 3y - 5z + 9 = 0.$
7. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ и $x - 2y + 5z + 17 = 0.$
8. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$ и $x - 2y + 4z - 19 = 0.$
9. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$ и $2x - y + 3z + 23 = 0.$
10. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$ и $2x - 3y - 5z - 7 = 0.$
11. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$ и $4x + 2y - z - 11 = 0.$
12. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$ и $3x - 2y - 4z - 8 = 0.$
13. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$ и $x + 2y - z - 2 = 0.$
14. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}$ и $5x - y + 4z + 3 = 0.$
15. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$ и $x + 3y + 5z - 42 = 0.$
16. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}$ и $7x + y + 4z - 47 = 0.$
17. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{5}$ и $2x + 3y + 7z - 52 = 0.$
18. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$ и $3x + 4y + 7z - 16 = 0.$
19. $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}$ и $2x - 5y + 4z + 24 = 0.$
20. $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}$ и $x - 2y - 3z + 18 = 0.$

21. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$ и $x + 7y + 3z + 11 = 0$.
22. $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$ и $3x + 7y - 5z - 11 = 0$.
23. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$ и $4x + y - 6z - 5 = 0$.
24. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$ и $5x + 9y + 4z - 25 = 0$.
25. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$ и $x + 4y + 13z - 23 = 0$.
26. $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$ и $3x - 2y + 5z - 3 = 0$.
27. $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}$ и $3x - y + 4z = 0$.
28. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}$ и $x + 2y - 5z + 16 = 0$.
29. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}$ и $3x - 7y - 2z + 7 = 0$.
30. $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}$ и $5x + 7y + 9z - 32 = 0$.