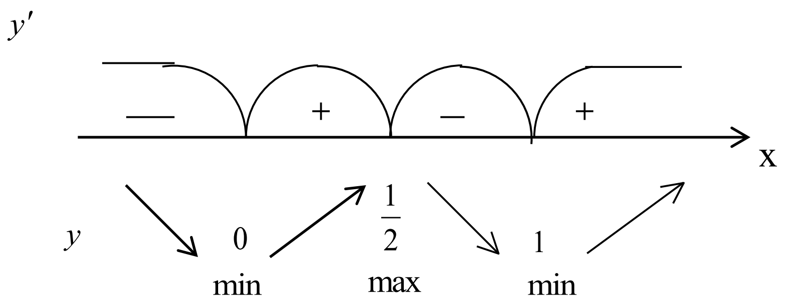
ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Задача 1. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2(1-x)^2$.

Решение. Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого возьмем производную y' и приравняем ее нулю.

$$y' = \left(x^2(1-x)^2\right)' = \left(x^2\right)'(1-x)^2 + x^2\left((1-x)^2\right)' = 2x(1-x)^2 + x^2 \cdot 2(1-x)(-1) = 2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x)$$
$$= 2x(1-x)[1-x-x] = 2x(1-x)(1-2x) = 2x(x-1)(2x-1)$$

$y' = 0$ при $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{2}$.



На тех интервалах, где $y' < 0$, функция убывает; где $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому интервалы возрастания функции $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $(1, \infty)$, интервалы убывания функции $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

По рисунку видно, что в точках $x = 0$ и $x = 1$ функция принимает свои минимальные значения, а при $x = \frac{1}{2}$ - максимальное. Найдем эти значения:

$y_{\min}(0) = 0, \quad y_{\min}(1) = 0$,

$$y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Ответ: $y_{\min}(0) = y_{\min}(1) = 0, \quad y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ на отрезке $[-2, 0]$.

Решение. Так как свои наименьшее и наибольшее значения непрерывная на отрезке функция может принимать либо на концах этого отрезка, либо в точках экстремума, входящих в этот отрезок, то находим значения исследуемой функции во всех этих точках и среди них выбираем наибольшее и наименьшее значения.

$$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 5 = -8 - 12 + 18 + 5 = 3;$$
$$y(0) = 5;$$
$$y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 5)' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3).$$

$y' = 0$ при $x^2 - 2x - 3 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}. \; x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$$

Найдем значение функции только при $x = -1$, так как $3 \notin [-2,0]$.

$$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10.$$

Выбираем наибольшее значение функции из найденных трех чисел; это 10. Теперь наименьшее – это 3.

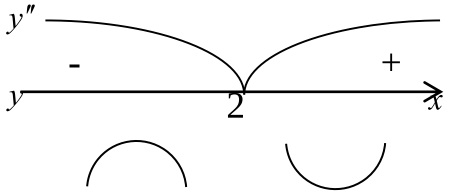
Ответ: $y_{наиб}(-1) = 10, \quad y_{наим}(-2) = 3.$

Задача 3. Найти точки перегиба функции $y = x \cdot e^{-x}$.

Решение. Так как точками перегиба являются те точки из области допустимых значений, где вторая производная y'' меняет знак, то сначала найдем y', затем y'' и приравняем y'' нулю.

$$y' = \left(xe^{-x}\right)' = (x)' e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} - xe^{-x}$$
$$y'' = (y')' = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)' = -e^{-x} - \left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

$y'' = 0$ при $x = 2$, так как $e^{-x} > 0$ для всех x.



Так как в точке $x = 2$ y'' изменила знак, то функция y изменила напрвление.

Ответ: $x = 2$ - точка перегиба.

Задача 4. Найти асимптоты графика $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$.

Решение. Так как вертикальную асимптоту имеет функция с разрывом 2-го рода в точке $x = x_0$, то сначала найдем точки разрыва и исследуем поведение функции в их окрестностях. О.Д.З. $x \neq -1$. Значит, $x = -1$ - точка разрыва, так как функция в этой точке не определена. Найдем предел слева и предел справа функции $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$ при подходе к точке $x=-1$. И выясним, разрыв какого рода терпит данная функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x\to -1-0\\ x<-1}} \frac{2x^2}{x+1} = \left| \begin{array}{l} x+1\to -0 \\ \dfrac{1}{x+1}\to -\infty \end{array} \right| = -\infty.$$ Предел слева равен $-\infty$.

$$\lim_{\substack{x\to -1+0\\ x>-1}} \frac{2x^2}{x+1} = \left| \begin{array}{l} x+1\to +0 \\ \dfrac{1}{x+1}\to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$ Предел слева равен $+\infty$.

Так как односторонние пределы бесконечны, то в точке $x=-1$ разрыв 2-го рода, поэтому уравнение вертикальной асимптоты $x=-1$.

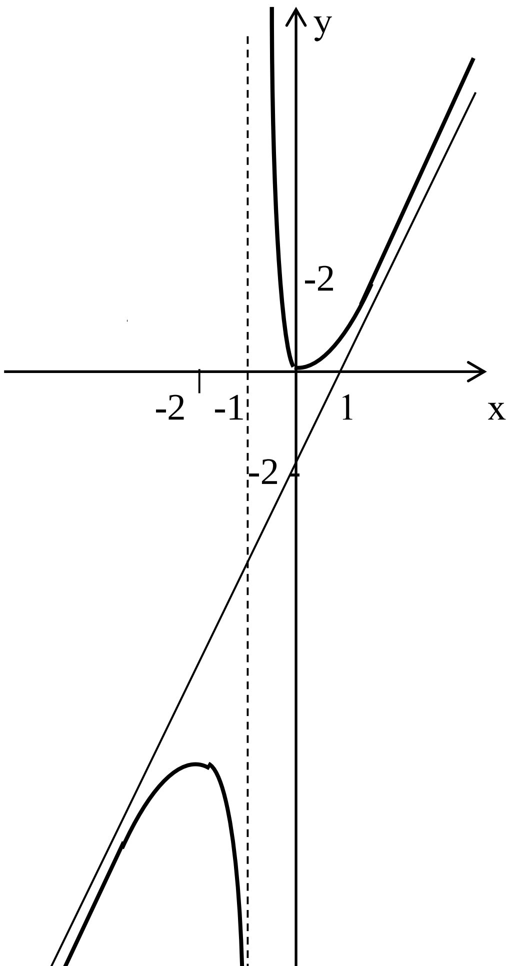
Функция также может иметь или не иметь наклонные асимптоты. Если они есть, то их уравнение $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\quad \mathrm{b}=\lim_{\mathrm{x}\to\infty}\big(f(x)-kx\big).$$

Найдем правую наклонную асимптоту при $x\to+\infty$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1}:\mathrm{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{применяем}\\ \text{правило Лопиталя}\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1}=$$
$$=2\Rightarrow\quad k=2.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x(x+1)}{x+1}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x^2-2x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{По правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-2x)'}{(x+1)'}=-2\Rightarrow\quad b=-2.$$



Подставляем в уравнение асимптоты $y=kx+b$ и получаем уравнение правой асимптоты $y=2x-2$.

Найдем левую асимптоту при $x\to-\infty$. Повторяя все предыдущие действия, как и для $x\to+\infty$, получаем уравнение левой асимптоты $y=2x-2$.

Ответ: Вертикальная асимптота $x=-1$. Наклонная асимптота $y=2x-2$.

Задача 5. Исследовать функцию и построить ее график $y=\dfrac{x^3}{2(x^2+1)}$.

Исследование функции будем проводить по плану.

1. Найдем О.Д.З. и, если есть асимптоты О.Д.З. , $x-$ любое. Следовательно, нет точек разрыва, поэтому вертикальных асимптот нет.

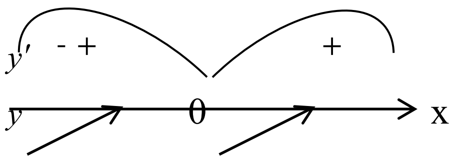
2. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат, исследуем функцию на четность, тригонометрические функции - на периодичность. Пусть $x=0$, тогда $y=0$. Точка (0,0). Проверим четность функции.

$y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{2\left((-x)^2+1\right)}=\dfrac{-x^3}{2(x^2+1)}=-y(x)$. Значит, наша функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Исследуем монотонность функции с помощью y'.

$$y'=\left(\frac{x^3}{2(x^2+1)}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2(x^2+1)-2x\cdot x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$y'=0$ при $x=0$



Получаем, что функция $y=\dfrac{x^3}{2(x^2+1)}$ всюду возрастающая, не имеющая точек

4. С помощью y'' находим точки перегиба

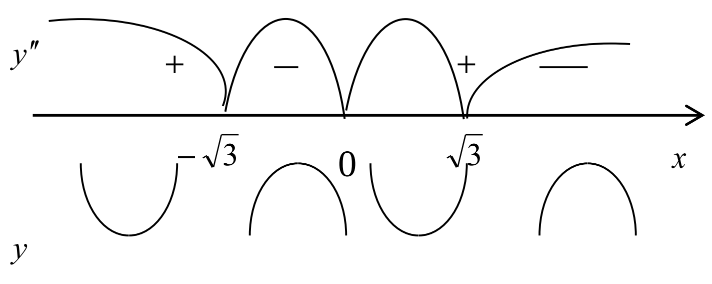
$$y''=(y')'=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\right)'=\frac{1}{2}\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(x^4+3x^2)}{(x^4+1)^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2x(2x^2+3)(x^2+1)^2-2x(x^2+1)(2x^4+6x^2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2x(x^2+1)}{2}\frac{(2x^2+3)(x^2+1)-(2x^4+6x^2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=x\frac{2x^4+3x^2+2x^2+3-2x^4-6x^2}{(x^2+1)^3}=x\frac{3-x^2}{(x^2+1)^3}.$$

$y''=0$ при $x=0$ и $3-x^2=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.



Все точки, в которых $y''=0$, являются точками перегиба, так как в них y'' меняет знак на противоположный.

Найдем значения функции в этих точках :

$$y\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{2\left((-\sqrt{3})^2+1\right)}=\frac{-3\sqrt{3}}{2\cdot 4}\approx -0{,}65,\ y(0)=0,\ y\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}\approx +0{,}65\ .$$

5. Найдем наклонные асимптоты, если они есть $y=kx+b$.

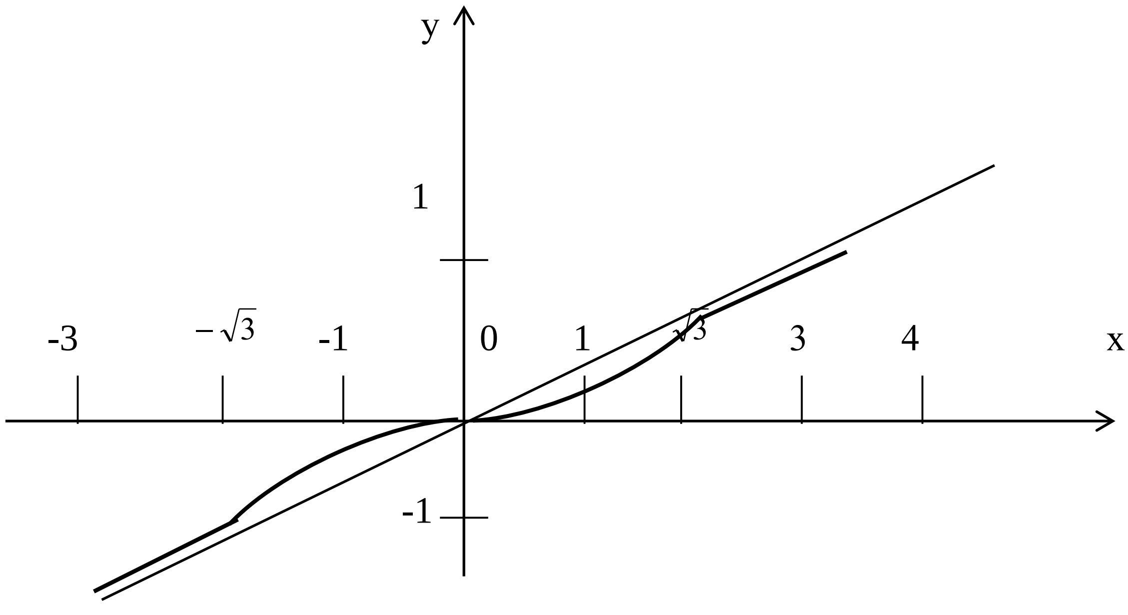
Сначала $x\to+\infty$, тогда $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2(x^2+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{matrix}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{2(x^2+1)'}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=\frac{1}{2}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$. Теперь найдем $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k(x)\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2(x^2+1)}-\frac{\overset{x^2+1}{\frown}x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-x}{2(x^2+1)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(x^2+1)'}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0\Rightarrow \mathrm{b}=0.$$

Получаем $y=\frac{x}{2}$ - уравнение правой асимптоты. Повторяя прежние рассуждения, уже при $x\to-\infty$ получим уравнение левой асимптоты $y=\frac{x}{2}$.

6. Теперь строим график функции, начертив сначала все асимптоты, отметив точки экстремума, точки перегиба и точки пересечения с осями координат.



ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.

ЗАДАНИЕ № 1. Исследовать на экстремум:

1.	1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$,	2)	$y = x^2 - 2\ln x + 3$.
2.	1) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$,	2)	$y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$.
3.	1) $y = x^3 - 6x^2 + 5$,	2)	$y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}$.
4.	1) $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 9$,	2)	$y = \frac{1}{x} + x$.
5.	1) $y = \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x}$,	2)	$y = x^4 - 2x^2$.
6.	1) $y = x^2(x-12)^2$,	2)	$y = (1+x)e^x$.
7.	1) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 7$,	2)	$y = \frac{1}{1+x^2}$.
8.	1) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$,	2)	$y = x^2(1-x)$.
9.	1) $y = 80x - x^5 - 80$,	2)	$y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x-3}$.
10.	1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$,	2)	$y = \frac{x^2}{x-2}$.
11.	1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$,	2)	$y = \frac{3-x^2}{x+2}$.
12.	1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$,	2)	$y = x + \frac{1}{x}$.
13.	1) $y = x^4 - 2x^2 + 6$,	2)	$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$.
14.	1) $y = 17 - 3x^2 + \frac{1}{2}x^4$	2)	$y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.
15.	1) $y = x^2(x-2)^2$,	2)	$y = \frac{x^3}{3} + x^2$.
16.	1) $y = (x+1)^2 \cdot (x-1)^2$	2)	$y = x^3 + 6x^2 + 9x$

ЗАДАНИЕ № 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1. $y = 72x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 1$ на отрезке $[0;1]$. 3. $y = 2 - 2x^2 + x^4$ на отрезке $[0;3]$.

2. $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2;2]$. 4. $y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5. $y = (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[0;2]$. 11. $y = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 1$ на отрезке $[0;2]$
.

6. $y = x - 2\sqrt{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{9};4\right]$. 12. $y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0;3]$

.

7. $y=2x^3-3x^2-36x+40$ на отрезке $[1;3]$.
13. $y=15+4x^2-x^4$ на отрезке $[-1;2]$.
8. $y=\sin x-2x$ на отрезке $[0;\pi]$.
14. $y=3x-x^3$ на отрезке $[-2;3]$.
9. $y=x^3-6x^2+9x-2$ на отрезке $[0;4]$.
15. $y=3x-x^3$ на отрезке $[0;3]$.
10. $y=x^3-7{,}5x^2+18x+1$ на отрезке $[0;4]$.
16. $y=2x^3-3x^2+1$ на отрезке $[0;2]$.

ЗАДАНИЕ № 3. Найти точки перегиба функции:

1. $y=\dfrac{x^3}{6}-x^2$.
2. $y=x^3-6x^2+9x+5$.
3. $y=\dfrac{5x}{2+x^2}$.
4. $y=3x^5-5x^4+3x-2$.
5. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.
6. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.
7. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$.
8. $y=\dfrac{1}{x^2+3}$.
9. $y=\dfrac{x^3}{x-1}$.
10. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.
11. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.
12. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$.
13. $y=\dfrac{6x}{1+x^2}$.
14. $y=\dfrac{x+1}{x^2}$.
15. $y=xe^x$.
16. $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$.

ЗАДАНИЕ № 4. Найти асимптоты графика функции:

1. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.
2. $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.
3. $y=\dfrac{2x^2-3x+5}{5x}$.
4. $y=\dfrac{x^2}{x+4}$.
5. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$.
6. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.
7. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.
8. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.
9. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.
10. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.
11. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.
12. $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.
13. $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.
14. $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$.
15. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$.
16. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

ЗАДАНИЕ № 5. Исследовать функцию и построить ее график:

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$.
2. $y=x^3-3x$.
3. $y=\dfrac{3x}{4+x^2}$.
4. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.
5. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.
6. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.
7. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.
8. $y=\dfrac{x^3}{x-1}$.
9. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.
10. $y=xe^{-x}$.
11. $y=\dfrac{1}{x^2+3}$.
12. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

13. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$. 14. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. 15. $y=\dfrac{8}{x^2-4}$. 16. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$.

ЗАДАНИЕ № 6

1. При каких размерах коробка (без крышки), изготовленная из квадратного листа картона, со стороной a, имеет наибольшую вместимость?
2. Среди всех прямоугольников, имеющих данный периметр $2a$, найти тот, площадь которого наибольшая.
3. Кусок проволоки данной длины l согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.
4. Число 50 записать в виде суммы двух чисел, сумма кубов которых наименьшая.
5. Записать число 625 в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшая.
6. Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 см^2, найти прямоугольник с наименьшим периметром.
7. Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 600 см^2, найти параллелепипед наибольшего объема.
8. Из всех прямоугольников с периметром P найти прямоугольник с наименьшей диагональю.
9. Из всех равнобедренных треугольников с периметром P найти треугольник с наибольшей площадью.
10. Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма одного катета и гипотенузы равна l, найти треугольник с наибольшей площадью.
11. Найти размеры открытого сверху цилиндрического бака данного объема 64 литра, при которых на его изготовление пойдет минимальное количество жести.
12. Окно магазина имеет форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр фигуры равен 15м. При каком размере полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?
13. Образующая конического сосуда равна 25см. Какой должна быть его высота, чтобы вместимость сосуда была наибольшей.
14. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса r.

15. Решеткой длиной 120 м нужно огородить площадку наибольшей площади. Найти размеры этой площадки.
16. Разложить число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.